

Katedra fyziky FEL ČVUT

## **Magnetohydrodynamika**

**Pavel Kubeš**

# Magnetohydrodynamika

## Obsah

Obsah	.....	1
1 Základy magnetohydrodynamiky	.....	2
1.1 Úvod	.....	2
1.2 Hydrodynamika	.....	2
1.3 Základní rovnice	.....	4
1.4 Vztahy mezi MHD a kinetickou teorií	.....	5
1.5 MHD modely	.....	6
1.6 Rovnice pro magnetické pole	.....	7
1.7 Valénova rovnice	.....	9
1.8 Magnetická energie a napětí	.....	10
1.9 Magnetomechanické jevy	.....	13
2 Magnetohydrostatika	.....	15
2.1 Rovnovážný magnetický pinč	.....	15
2.2 Helikální struktury	.....	16
3 MHD dynamo	.....	19
3.1 Magnetické pole Země	.....	19
3.2 Sluneční magnetické pole	.....	20
3.3 Teorie MHD dynama	.....	21
3.4 $\alpha$ - efekt	.....	22
4 Příklady	.....	24
4.1 Magnetohydrodynamická turbulence	.....	24
4.2 Organizované struktury	.....	25
4.3 Vlastnosti neideálního plazmatu	.....	26
4.4 Elektrická dvojvrstva	.....	28
4.5 Generace plazmoidů	.....	29
4.6 Vývoj magnetických pinčů	.....	31
4.7 Rentgenové lasery	.....	33

## Použitá literatura a prameny

T. Cowling : Magnitnaja gidrodinamika, Moskva, Atomizdat, 1978

P. Kubeš, J. Kravárik : Publikace katedry fyziky FEL ČVUT

H.K.Moffatt: Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids, Cambridge Univ. Press, 1980.

# 1. ZÁKLADY MAGNETOHYDRODYNAMIKY

## 1.1 Úvod

Magnetohydrodynamika je nauka o chování vodivé tekutiny (kapaliny nebo plazmatu) v magnetickém poli. Vzájemný pohyb vodivé tekutiny a magnetického pole indukuje elektrické pole a proudy. Elektrické proudy budí ve svém okolí magnetické pole a to mechanickými účinky ovlivňuje zpětně pohyb vodivé tekutiny. Jedná se o komplikovanou interakci vodivé tekutiny s elektromagnetickým polem, o silně nelineární jevy a o vzájemné přeměny magnetické, mechanické a tepelné energie. Počátečním mechanismem přeměn může být jak silné elektrické pole (elektrické výboje), tak silné proudy a silná magnetická pole nebo relativní intenzivní mechanický pohyb plazmatu vůči magnetickému poli. První začátky magnetohydrodynamiky byly spojeny s experimenty prováděnými se rtutí. Ve 20 – 50tých letech inspirovalo další rozvoj řešení kosmických problémů – zemského jádra, Slunce, hvězd a plazmatu v mezihvězdném prostoru. V pozdějším období docházelo k rozvoji laboratorních výzkumů zejména při udržení plazmatu magnetickým polem pro řízenou jadernou fúzi. Galaktické plazma, nitro hvězd, a laserové a pinčové plazma s vysokou hustotou energie v pozemských laboratořích spojuje řada analogií přes obrovské rozdíly desítek řádů v prostorových a časových dimenzích. V kosmu jsou zdrojem energetických proměn magnetická pole a v laboratorním prostředí silná elektrická pole nebo intenzivní elektromagnetické záření výkonných laserů.

Magnetohydrodynamika umožňuje hlubší pochopení souvislostí ve Vesmíru a jevů spojených s vysokou koncentrací energie v laboratořích pro studium rentgenových zdrojů a jadernou fúzi. Magnetické pole je zdrojem formy ušlechtilé energie se silnou samoorganizační schopností, projevující se např. v magnetohydrodynamických turbulencích, magnetickém dynamu a stabilních prstencových a helikálních strukturách.

## 1.2 Hydrodynamika

Nejprve uvedeme základní pojmy používané v hydrodynamice. Často se užívá tzv. Eulerův přístup, kdy se pohyb vztahuje k pevnému místu soustavy a popisuje se časovou změnou a okamžitým polem rychlosti proudící tekutiny:

$$\vec{v} = f(\vec{r}, t)$$

Potom je zrychlení

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v},$$

kde na pravé straně první člen vyjadřuje lokální změnu rychlosti a druhý člen *konvektivní zrychlení* vyvolané nehomogenním polem rychlostí.

Pohyb tekutiny můžeme vyjádřit jednoduše ve stacionárním případě, kdy funkce  $\vec{v}(\vec{r})$  se časově nemění (pohyb je nevírový, potenciálový):  $rot \vec{v} = 0$ ,  $grad \Phi = \vec{v}$

a složitěji při pohybu nestacionárním, vírovém:  $rot \vec{v} \neq 0$ .

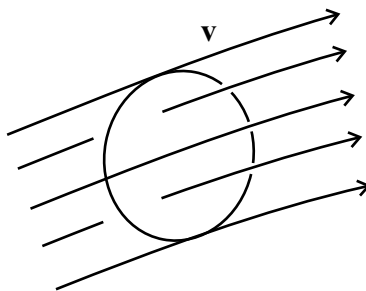
Ve stacionárním případě se elementy tekutiny pohybují po tzv. proudnicích, to je po křivkách s tečnami rovnoběžnými s  $\vec{v}$  daných rovnicemi:

$$k\vec{v} = d\vec{r},$$

odkud

$$k = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

Elementární konfigurací ve stacionárním proudění je *proudová trubice*, což je plocha vytvořená proudnicemi probíhajícími malou uzavřenou křivkou



Obr.1.1: Proudová trubice

Proudová trubice uzavírá proudové vlákno.

Při vírovém pohybu je popis složitější. Pohybuje-li se element prostředí ve víru kruhového pohybu, platí

$$\oint \vec{v} d\vec{l} = v l$$

a výraz  $rot \vec{v}$  můžeme odhadnout z definice úpravou

$$|rot \vec{v}| = \frac{\oint \vec{v} d\vec{l}}{\Delta S} = \frac{v 2\pi r}{\pi r^2} = \frac{2v}{r}$$

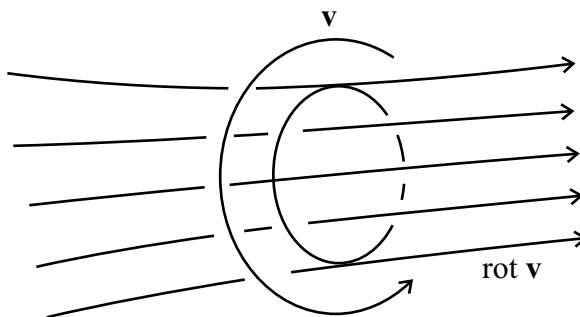
Vírová čára je spojitá množina bodů dotyku tečen  $rot \vec{v}$  (osa víru) daná rovnicí:

$$d\vec{r} = k \cdot rot \vec{v}$$

a

$$k = \frac{dx}{(rot \vec{v})_x} = \frac{dy}{(rot \vec{v})_y} = \frac{dz}{(rot \vec{v})_z}$$

Vírovou trubici se rozumí plocha z vírových čar probíhajících malou uzavřenou křivkou:



Obr.1.2: Vírová trubice

Vírové vlákno tvoří obsah vírové trubice.

Intenzita víru (vírové trubice) je veličina určená podílem vektoru  $rot \vec{v}$  a plochy průřezu víru v daném místě:

$$\frac{rot \vec{v}}{\Delta S}$$

a je konstantní podél celé vírové trubice.

Pro určení míry laminarity a turbulence se zavádí pojem kinetická vazkost  $s$  :

$$s = \frac{1}{3} \bar{u} \bar{l},$$

kde  $\bar{u}$  je střední tepelná rychlost,  $\bar{l}$  je střední volná dráha a  $\eta$  dynamická vazkost:

$$\eta = \rho \cdot s.$$

Základní pohybovou rovnicí pro tekutiny je Navier-Stokesova rovnice:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u}$$

### 1.3 Základní rovnice

a) Chování elektromagnetického kontinua popisují Maxwellovy rovnice, v nichž zanedbáme posuvný proud a náboj  $\rho$ :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

a Ohmův zákon:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

kde  $\gamma$  je měrná vodivost. V případě pohybu vodivé tekutiny v magnetickém poli je třeba použít zobecněný Ohmův zákon:

$$\vec{j} = (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \gamma.$$

b) Chování tekutiny popisuje

(i) rovnice kontinuity:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho = 0$$

a pro  $\vec{v}$  nezávislé na  $\vec{r}$  ji lze vyjádřit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

(ii) pohybová rovnice:

$$\vec{f} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = qn(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \nabla p + \vec{f},$$

kde  $\vec{f}$  je hustota síly,  $p$  tlak.  $\vec{f}$  představuje vazkostní sílu, která má v kapalině tvar

$$\vec{f} = \eta \nabla^2 \vec{v}.$$

*Tenzor tlaku*

Tlak můžeme jednoduše vyjádřit v izotropním prostředí, kdy neuvažujeme vnější magnetické pole, výrazem

$$p = \sum_{a=1}^n n_a k T_a,$$

kde  $n$  je hustota,  $k$  Boltzmannova konstanta. Tlak je v tomto případě skalár. Obecně v přítomnosti magnetického pole je však tlak tenzorem. Orientujme směr magnetického pole podél osy  $z$ :

$$\vec{B} \equiv (0, 0, B_z).$$

Magnetické pole omezuje pohyb nabitých částic v kolmém směru na siločivky. V důsledku Faradayova indukčního zákona při tomto pohybu vzniká elektrický proud a takové doprovodné magnetické pole, které příčný pohyb zastaví. V podélném směru magnetického pole pohyb nabitých částic není omezen. Přítomnost magnetického pole vede v konečném důsledku k vytvoření dvou teplot, teploty podélné  $T_{\parallel}$  a teploty příčné  $T_{\perp}$  a analogicky dvou tlaků  $p_{\parallel}$  a  $p_{\perp}$ . V takovém případě lze složky tenzoru tlaku vyjádřit ve tvaru:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

Mimoosové složky tohoto tenzoru souvisí s vnitřním třením a příčnými napětími, která jsou ovlivněna Larmorovým kruhovým pohybem nabitých částic kolem silokřivek vnějšího magnetického pole. V jeho důsledku se zvyšuje se srážková frekvence a zkracuje relaxační doba pro vytvoření rovnovážného Maxwellova rozdělení. Vzhledem k asymetrii Larmorova pohybu je relaxace a uplatnění magnetohydrodynamiky tedy vhodnější v příčném směru vůči orientaci silokřivek.

(iii) *energetická bilance*

Pro tepelnou energii jednotky objemu lze použít rovnici:

$$\frac{du}{dt} = \frac{p}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \eta |\operatorname{rot} v|^2 + \lambda \nabla^2 T + \gamma j^2 + I,$$

kde  $u$  je tepelná energie v jednotce objemu,  $\lambda$  je koeficient tepelné vodivosti. Druhý člen pravé strany představuje úbytek energie v důsledku vazkosti, třetí člen přenos tepla, čtvrtý člen Jouleovo teplo a pátý člen vyzářenou elektromagnetickou energií.

(iv) *stavová rovnice*

Velmi důležitý vztahem pro popis magnetohydrodynamických přeměn je vztah stavových veličin teploty tlaku a objemu v případě nízkých relaxačních časů. Při rychlých změnách, kdy nedochází k výměně tepla mezi jednotlivými systémy, lze použít adiabatické přiblížení:

$$p = C\rho^{\chi}.$$

Odtud je zřejmé

$$\frac{\partial p}{\partial x} = C\chi\rho^{\chi-1} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

a

$$\frac{\nabla p}{p} = \frac{\chi \nabla \rho}{\rho} = \frac{\chi \nabla(mn)}{mn} = \chi \frac{\nabla n}{n},$$

kde  $\chi$  je adiabatický exponent,  $\rho$  hustota tekutiny,  $m$  hmotnost částic a  $n$  koncentrace částic.

## 1.4 Vztah mezi magnetohydrodynamikou a kinetickou teorií

Alternativou magnetohydrodynamiky je kinetická teorie plazmatu, kde roli fluida představují částice. Zatímco magnetohydrodynamika umožňuje studovat vlastnosti kolektivního chování a je omezena v možnostech popisu chování jednotlivých částic, u kinetické teorie je tomu naopak. Pomocí kinetické teorie je možné určit jednotlivé makroskopické parametry magnetohydrodynamiky.

Základem kinetické teorie je rozdělovací funkce rychlostí:

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

V rovnovážných podmínkách je maxwellovská. Pomocí ní lze určit hustotu částic  $n(\vec{r}, t)$ :

$$n(\vec{r}, t) = n_0 \int_{v=0}^{\infty} f dv,$$

hustotu hmotnosti  $\rho$  : 
$$\rho = n \cdot m = n_0 m \int_0^{\infty} f dv ,$$

hustotu náboje  $\rho_q$  : 
$$\rho_q = nq = n_0 q \int_0^{\infty} f dv ,$$

střední rychlost  $\bar{v}$  :

$$\bar{v} = \frac{n_0 \int_0^{\infty} f v dv}{n_0 \int_0^{\infty} f dv}$$

a proudovou hustotu  $\vec{j}$  :

$$\vec{j} = q n \bar{v} = q n_0 \int_0^{\infty} f \vec{v} dv / \int_0^{\infty} f dv .$$

### 1.5 Magnetohydrodynamické modely

V praxi se používají dva magnetohydrodynamické modely, jedno a dvoukapalinový. Pokud je plazma tvořeno dvěma fluidy, elektronovým a iontovým a pokud lze zanedbat hmotnost elektronů vůči hmotnosti iontů, používá se model jednokapalinový a pohyblivé fluidum tvoří elektrony. V případě, že není možné zanedbat pohyb iontů, používá se model dvoukapalinový.

Veličina / model		dvoukapalinový		jednokapalinový
Hustota $\rho$	=	$n_e m_e + n_i m_i$	=	$n_i m_i$ pro $T_e = T_i$ a $n_e = n_i$
Střední rychlost $\bar{v}$	=	$\frac{n_e m_e v_e + n_i m_i v_i}{n_e m_e + m_i n_i} \cong \bar{v}_i$	=	$(m_e / m_i) \bar{v}_e$
Proudová hustota $\vec{j}$	=	$n_e e \vec{v}_e + n_i e \vec{v}_i$	=	$n_e e \vec{v}_e$

V případě tepelné rovnováhy, kdy  $T_e = T_i$ , má v bilanci hybnosti dominantní vliv iontová komponenta, jelikož pro

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_e v_e^2$$

je po úpravě:

$$\frac{m_i}{m_e} = \left( \frac{v_e}{v_i} \right)^2$$

a

$$\frac{m_i}{m_e} > \frac{v_e}{v_i} .$$

Je zřejmé, že

$$m_i v_i > m_e v_e .$$

Celkový tlak plazmatu  $p$  :  $p = p_e + p_i = n_e k T_e + n_i k T_i$

je pro případ  $n_e = n_i$   $p = 2 n_e k T_e = 2 p_e$  .

Pohybová rovnice má potom jednodušší vyjádření:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \rho (\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_i = \rho_q [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] - \vec{\nabla} p + \vec{S},$$

kde  $S$  je tření. V případě dominantních elektronových srážek lze tření vyjádřit ve tvaru:

$$\vec{S} = \rho (\vec{v}_i - \vec{v}_e) f_{ie}.$$

$f_{ie}$  je srážková frekvence.

## 1.6 Rovnice pro magnetické pole

V základních Maxwellových rovnicích se vyskytují kombinace složky elektrického a magnetického pole. Jak uvidíme, je výhodné vyjádřit vztah pro samotné magnetické pole. Při jeho odvození vyjdeme z rovnic

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} \quad \text{a} \quad \vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

které upravujeme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\text{rot } \vec{E} = -\text{rot} \left[ \frac{\vec{j}}{\gamma} - \vec{v} \times \vec{B} \right] = \text{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] - \frac{1}{\gamma \mu} \text{rot rot } \vec{B} = \\ &\text{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] + \frac{1}{\mu_0} \Delta \vec{B} - \frac{1}{\gamma \mu} \text{grad div } \vec{B} \end{aligned}$$

Tedy platí:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] + \frac{1}{\gamma \mu} \Delta \vec{B}. \quad (1.6.1)$$

Toto je rovnice pro změnu magnetického pole ve vodivém prostředí. Hledejme význam členů na pravé straně rovnice.

### a) Difúzní člen

Druhý člen na pravé straně rovnice (1.6.1) se uplatní v případě nízké rychlosti nebo malé vodivosti a rovnice má potom tvar:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma \mu} \Delta \vec{B}.$$

„Časová změna magnetického pole je úměrná prostorovému úbytku gradientu magnetického pole“. Tato rovnice má tvar difúzní rovnice. Výraz  $\eta = \frac{1}{\gamma \mu}$  nazýváme difúzní

koeficient s rozměrem  $[\eta] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ . Vyjadřuje „počet siločar, který projde  $1 \text{ m}^2$  za  $1 \text{ s}$ “. Difúzi si lze představit jako „prosakování“ magnetických siločárek prostředím. Difúze popisuje zánik magnetického pole nebo únik plazmatu v kolmém směru k magnetickým siločárkám a nebo neutralizaci opačných magnetických toků.

Pomocí této rovnice je možné odhadnout dobu zániku magnetického pole  $\Delta t$ :

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{\gamma \mu} \cdot \frac{\Delta B}{L^2},$$

kde  $L$  je charakteristický rozměr oblasti. Potom je  $\Delta t = \mu \gamma L^2$ .

Jako příklad lze uvést dobu zániku magnetického pole v měděné kouli s poloměrem  $1 \text{ m}$ . Pro  $\gamma = 2,6 \times 10^6$  je to několik sekund. Doba zániku magnetického pole v měděném vodiči o průměru  $1 \text{ mm}^2$  je několik  $\mu\text{s}$ , doba zániku v zemské kouli je  $\sim 150\,000$  let, u slunečních skvrn s dobou života desítek dnů nebo několik měsíců je to doba  $\sim 300$  let a sluneční magnetické pole by mělo vymizet za  $\sim 10^9$  let.

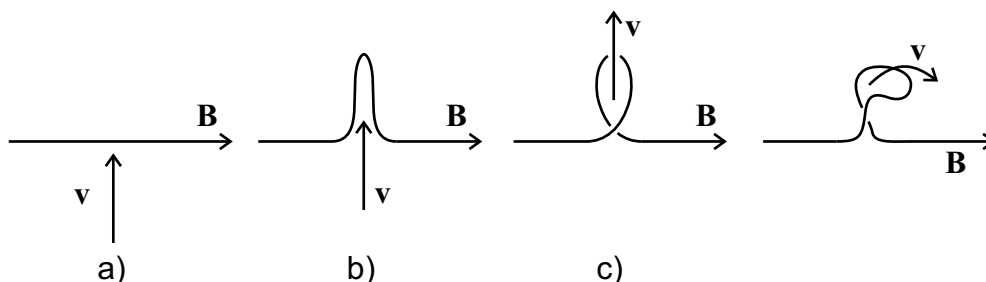


### a) Zamrzlé magnetické pole

V případě velké vodivosti dominuje v rovnici (1.6.1) na pravé straně první člen. Rovnice

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}[\vec{v} \times \vec{B}] \quad (1.6.2)$$

je rovnicí víru. Můžeme ji interpretovat tím způsobem, že plazma proudící kolmo na magnetickou siločivku tuto siločivku unáší a stáčí do spirály:



Obr. 1.3: Stáčení siločivky příčným proudem nabitých částic

Doba *periody víru*  $\Delta t$ : Upravíme rovnici (1.6.2) do tvaru  $\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{VB}{L}$ , kde  $V$  je

charakteristická rychlost a  $L$  charakteristický rozměr. Odtud je  $\Delta t = L/V$

Rovnice (1.6.2) je rovnicí kontinuity, kde se společně pohybují prostředí i magnetické siločáry ve vírech. Orientace víru nezávisí na druhu náboje. V případě, že kinetická energie plazmatu přesahuje velikost magnetické energie, silný proud vleče, protahuje a stáčí siločivky a laminární proudění přechází do vírového. V případě, že dominuje magnetická energie nad mechanickou nebo tepelnou, dochází k zachycení částic příčným magnetickým polem. Společný vázaný pohyb plazmatu a magnetického pole nazýváme „zamrznutím magnetického pole do plazmatu“.

### b) Porovnání vlivu difúzního a vírového členu

Pro porovnání použijeme upravené rovnice (1.6.1):

$$\frac{B}{t} = \frac{VB}{L} + \frac{1}{\gamma\mu} \cdot \frac{B}{L^2}$$

Vyjádříme podíl 1 a 2 členu na pravé straně:

$$\frac{V}{L} : \frac{1}{\gamma\mu L^2} = \mu\gamma VL = R_M$$

a označíme jej  $R_M$  (magnetické Reynoldsovo číslo). V případě  $R_M \gg 1$  dominují víry a zamrzlé magnetické pole, v případě  $R_M \ll 1$  ovlivňuje změnu magnetického pole difúzní člen. Magnetické Reynoldsovo číslo představuje počet otoček víru než dojde k jeho rozpadu. Charakteristickým rozměrem oblasti pro případ průniku opačných magnetických polí je rozměr hranice obou oblastí.

## 1.7 Valénova rovnice pro zamrzlé magnetické pole

Odvodíme rovnici pro společný pohyb vodivého prostředí a magnetického pole. Vyjdeme ze čtyř známých rovnic - rovnice víru, rovnice kontinuity, konvektivní derivace a rovnice pro nezářidlové magnetické pole:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{v} \times \vec{B}], \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \rho \vec{v}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}), \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

a provádějme úpravy pro časovou změnu výrazu  $\frac{\vec{B}}{\rho}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{B}}{\rho} \right) &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \right] \frac{\vec{B}}{\rho} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \frac{1}{\rho} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{B}}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\vec{B}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{B}}{\rho} = \\ &= \frac{1}{\rho} \text{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] + \frac{\vec{B}}{\rho^2} \text{div} \rho \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{B}}{\rho}. \end{aligned}$$

Při další úpravě se omezíme na i-tou komponentu, použijeme Croneckerovy symboly

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \text{ pro } i = j \\ \delta_{ij} &= 0 \text{ pro } i \neq j \end{aligned}$$

a symbol

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= 1 \text{ pro kladnou permutaci } i,j,k \\ &= 0 \text{ pro buď } i=j \text{ nebo } j=k \text{ nebo } i=k \\ &= -1 \text{ pro zápornou permutaci indexů } i,j,k. \end{aligned}$$

a parciální derivaci podle i-té proměnné označíme indexem i:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{B_i}{\rho} \right) &= \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ijk} \partial_j (v \times B)_k + \frac{B_i}{\rho^2} \partial_k \rho v_k + v_j \partial_j \frac{B_i}{\rho} = \\ &= \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} v_l B_m + \frac{B_i}{\rho^2} (v_k \partial_k \rho + \rho \partial_k v_k) + \frac{1}{\rho} v_j \partial_j B_i - \frac{B_i}{\rho^2} v_j \partial_j \rho = \\ &= \frac{1}{\rho} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j v_l B_m + \frac{B_i}{\rho^2} (v_k \partial_k \rho + \rho \partial_k v_k) + \frac{1}{\rho} v_j \partial_j B_i - \frac{B_i}{\rho^2} v_j \partial_j \rho = \\ &= \frac{1}{\rho} \partial_j v_i B_j - \frac{1}{\rho} \partial_j v_j B_i + \frac{B_i}{\rho^2} v_k \partial_k \rho + \frac{B_i}{\rho} \partial_k v_k + \frac{v_j}{\rho} \partial_j B_i - \frac{B_i}{\rho^2} v_j \partial_j \rho = \\ &= \frac{1}{\rho} v_i \partial_j B_j + \frac{1}{\rho} B_j \partial_j v_i - \frac{1}{\rho} v_j \partial_j B_i - \frac{1}{\rho} B_i \partial_j v_j + \frac{B_i}{\rho} \partial_k v_k + \frac{v_j}{\rho} \partial_j B_i \end{aligned}$$

První člen v poslední rovnosti je nulový, 3. a 6. člen se odečtou stejně jako 4 a 5 člen. Zbýlý druhý člen v rovnosti vytváří i-tou složkou rovnice

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{B}}{\rho} \right) = \left( \frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}.$$

Tato rovnice nese název *Valénova rovnice* a je matematickou formulací popisující magnetické silokřivky zamrzlé do vodivé tekutiny.

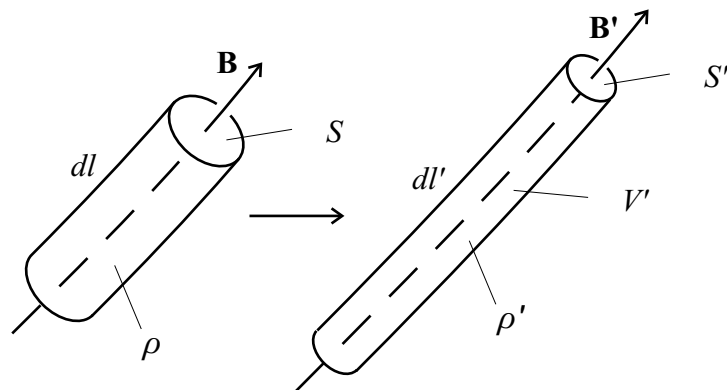
Pro lepší názornost provedeme s touto rovnicí následující úpravu:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{B}}{\rho} \right) = \left( \frac{B}{\rho} \frac{d}{dl} \right) \frac{dl}{dt}.$$

Po časové integraci je tedy počáteční hodnota výrazu  $\frac{B}{\rho dl}$  rovna konečné hodnotě  $\frac{B'}{\rho' dl'}$ .

Odtud je zřejmé, že platí

$$\frac{B}{\rho dl} = konst.$$



Obr.1.4: Interpretace silokřivek zamrzlých do plazmatu

Při další úpravě rozšířením  $\Delta S$  je možné odvodit relaci:

$$\frac{B\Delta S}{\rho\Delta l\Delta S} = \frac{\Delta\Phi}{\rho\Delta V} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta m},$$

kdy podíl indukčního toku válcem a hmotnosti válce je konstantní. Zesílení magnetického pole se může dít buď zmenšením příčného průřezu válce na obr.1.4 nebo prodloužením délky válce podél silokřivek. Zeslabení magnetického pole je doprovázeno zvětšením průřezu a/nebo prodloužením válečku. Je možné se setkat s těmito důsledky zamrzlých silokřivek:

- pohybující se plazma vleče magnetické pole a roztáhne se do společného víru
- rozšiřující se magnetické pole s sebou unáší plazma a v místech nehomogenit hustoty pole vznikají víry
- magnetické pole brání příčnému průniku vodivé látky (tzv. magnetické udržení)
- silné magnetické pole může odrážet plazma (magnetické čočky, magnetická zrcadla)

## 1.8 Magnetická energie, magnetická napětí

Hustota magnetické energie je dána výrazem:  $\frac{B^2}{2\mu}$

a celková magnetická energie je dána objemovým integrálem:

$$W_m = \int_V \frac{B^2}{2\mu} dV.$$

Častěji užívanou energetickou veličinou je výkon nebo hustota výkonu. Pro určení výkonu lze využít rovnici (1.6.1):

$$\frac{dW_m}{dt} = \frac{1}{\mu} \int_V \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV = \frac{1}{\mu} \int_V \vec{B} \text{rot} (\vec{v} \times \vec{B}) dV + \frac{1}{\mu} \int_V \vec{B} \eta \Delta \vec{B} dV. \quad (1.8.1)$$

První člen na pravé straně předcházející rovnice lze upravit podle operátorového vztahu:

$$\text{div} [\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{A} \text{rot} \vec{B} - \vec{B} \text{rot} \vec{A}$$

na tvar

$$\frac{1}{\mu} \text{div} [\vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B})] + \frac{1}{\mu} (\vec{v} \times \vec{B}) \text{rot} \vec{B}. \quad (1.8.2)$$

První člen (1.8.2) s objemovou integrací lze převést pomocí Gaussovy věty na výraz:

$$\frac{1}{\mu} \oint_S [\vec{B} \times \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B})] d\vec{S} ,$$

který má pro  $B = 0$  na povrchu plochy  $S$  nulovou hodnotu. Druhý člen (1.8.2)

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \vec{j}$$

upravíme do vhodnější konfigurace:

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \vec{j} = \varepsilon_{ijk} v_j B_k j_i = \varepsilon_{jki} B_k j_i v_j = (\vec{B} \times \vec{j}) \vec{v} = -\vec{v}(\vec{j} \times \vec{B}) .$$

Druhý člen na pravé straně rovnice (1.8.1) lze rovněž upravit:

$$\frac{1}{\mu} \eta \vec{B} \Delta \vec{B} = \frac{1}{\mu} \eta \vec{B} (-\text{rot rot} \vec{B} + \text{grad div} \vec{B}) = -\eta \vec{B} \text{rot} \vec{j} = \eta \text{div}(\vec{j} \times \vec{B}) - \eta \vec{j} \text{rot} \vec{B} .$$

První člen předcházející rovnice lze převést na plošný integrál. Pro nulovou hodnotu magnetické indukce na hranici je tento integrál nulový. Druhý člen po úpravě vyjadřuje

Jouleovo teplo  $-\frac{j^2}{\gamma}$ .

Výkon magnetického pole je tedy

$$\frac{dW_m}{dt} = \int_V \vec{v}(\vec{j} \times \vec{B}) dV - \int_V \frac{j^2}{\gamma} dV .$$

Ze základního kurzu fyziky víme, že výkon je dán skalárním součinem síly a rychlosti. Vektorový součin  $\vec{j} \times \vec{B}$  vyjadřuje Ampérovu sílu působící na objemovou jednotku plazmatu (jak vyplývá z následující úpravy) a nazývá se pondomotivní silou:

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} = \frac{\vec{j} dl}{S} \times \vec{B} = (\vec{j} \times \vec{B}) dV$$

Magnetická energie se tedy přeměňuje dvojím způsobem. Při difuzi dochází k dissipaci na Jouleovo teplo a vírová komponenta se transformuje na kinetickou energii.

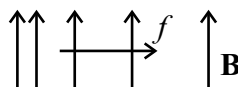
Hledejme interpretaci pondomotivní síly. Nejprve se upraví i-tá složka:

$$\begin{aligned} \vec{f}_i &= (\vec{j} \times \vec{B})_i = \frac{1}{\mu} \varepsilon_{ijk} (\text{rot} \vec{B})_j B_k = \frac{1}{\mu} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} (\partial_l B_m) B_k = \frac{1}{\mu} \varepsilon_{jki} \varepsilon_{jlm} (\partial_l B_m) B_k = \\ &= \frac{1}{\mu} [\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}] (\partial_l B_m) B_k = \frac{1}{\mu} [(\partial_k B_i) B_k - (\partial_i B_k) B_k] = \frac{1}{\mu} \left[ \partial_k (B_i B_k) - B_i \partial_k B_k - \frac{1}{2} \partial_i B_k^2 \right] = \\ &= \left( \text{Div} \frac{B_i * B_k}{\mu} \right)_i - \left( \text{grad} \frac{B^2}{2\mu} \right)_i \end{aligned}$$

Výraz  $\frac{\vec{B} * \vec{B}}{\mu}$  se nazývá Maxwellův tenzor napětí a jeho složky jsou  $\Pi_{ij} = B_i B_j$ . Divergence tenzoru je vektor. Divergence tenzoru napětí představuje sílu na jednotku objemu.

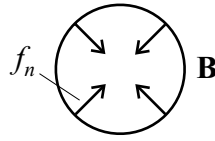
Pondomotivní síla  $\vec{j} \times \vec{B}$  má tři jednodušší složky:

- 1) sílu vyjádřenou gradientem tlaku  $\frac{B^2}{2\mu}$ ,



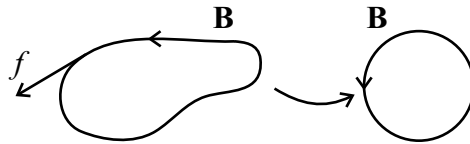
Obr.1.5 a: Síla proti směru gradientu tlaku

- 2) sílu ve směru poloměru křivosti siločar  $f_n = \frac{B^2}{\mu R}$ , jež ve svém důsledku jakoby „stahuje kruhovou silokřivku do jejího středu“,



Obr.1.5 b: Síla ve směru poloměru křivosti siločar

- 3) sílu ve směru tečny silokřivky  $f_\tau = \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{B^2}{\mu} \right) \vec{\tau}^0$ , jež směřuje k vyrovnání částí křivek s různou křivostí, ze silokřivek obecného tvaru vytváří kružnice.



Obr.1.5 c: Síla ve směru tečny silokřivky

Uvedené síly při zakřivených silokřivkách můžeme odvodit následujícím způsobem: Složka síly v obecném směru  $\vec{k}$ :

$$\vec{f}_k = \text{Div}_k \frac{\vec{B} * \vec{B}}{\mu} = \partial_k \left( \frac{B_k \vec{B}}{\mu} \right) \vec{k}^0,$$

Potom je složka síly ve směru tečny:

$$\vec{f}_\tau = \frac{\partial}{\partial l} \frac{B \cdot B}{\mu} \vec{\tau}^0 = \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{B^2}{\mu} \right) \vec{\tau}^0$$

a složka síly ve směru normály:

$$\vec{f}_n = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{B^2}{\mu} \right) \vec{n}^0 = \frac{B^2}{\mu} \frac{\partial \vec{n}^0}{\partial n} = \frac{B^2}{\mu R} \vec{n}^0.$$

Velmi užitečným parametrem pro magnetohydrodynamické vlastnosti je poměr kinetické a magnetické energie. Druhá odmocnina tohoto podílu je tzv. Alfvénovo číslo  $A$ :

$$A = \sqrt{\frac{W_k}{W_B}} = \sqrt{\frac{\rho v^2}{\frac{B^2}{\mu}}} = \frac{v}{B} \sqrt{\mu \rho}$$

V případě rovnosti obou energií, pro  $A = 1$  se odpovídající rychlost  $V_A = \frac{B}{\sqrt{\mu \rho}}$  nazývá

*Alfvénovou rychlostí*. Stav s rovnováhou mechanické, translační, rotační, magnetické a tepelné energie mají význačné postavení v rovnovážných a stabilních soustavách. Alfvénova rychlost je rychlostní hranicí pro přechod z laminárního a turbulentního proudění a určuje rychlost šíření vln plazmatem.

## 1.9. Magneto-mechanické jevy

Následující úvahy rozdělíme do dvou částí. Předpokládejme nejprve A) konečnou a následně B) nekonečnou vodivost.

A) Předpokládejme u vodivé tekutiny konečnou vodivost  $\gamma$ . Zobecněný Ohmův zákon je pro elektrické pole  $E_{\perp}$  kolmé k poli magnetickému:

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Potom má objemová hustota síly tvar:

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \gamma(\vec{E}_{\perp} \times \vec{B} - \vec{v}_{\perp} \cdot B^2) \quad (1.9.1)$$

a pohybovou rovnicí lze vyjádřit tvarem:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \gamma(\vec{E}_{\perp} \times \vec{B} - B^2 \vec{v}_{\perp}), \quad (1.9.2)$$

kde  $F$  je vnější síla.

a) Uvažujme nejprve proud nabitých částic s rychlostí  $v$  kolmo na směr magnetických siločar homogenního pole  $B$  bez vnějšího pole  $E$ . V tomto případě se indukuje elektrické pole  $\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$ , kterým se podle Lenzova zákona rychlost nabitých částic brzdí. Rovnice (1.9.2) má potom jednodušší tvar:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\gamma B^2 \vec{v}_{\perp}.$$

Z této rovnice lze odhadnout čas zastavení proudu nabitých částic:

$$\rho \frac{\Delta v}{\Delta t} = \gamma B^2 v,$$

kde pro  $\Delta v = v$  je

$$\Delta t = \frac{\rho}{\gamma B^2}.$$

b) V samotném elektrickém poli ( $B = 0$ ) jsou částice urychlovány a předávají svou energii během střední doby mezi dvěma srážkami  $\bar{t}$ . Z pohybové rovnice

$$q\vec{E} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

lze stanovit střední rychlost pohybu částic

$$\bar{v} = \frac{q\bar{t}}{2m} E$$

a hustotu elektrického proudu

$$\vec{j} = nq\bar{v} = \frac{nq^2\bar{t}}{2m} \vec{E}.$$

c) Uvažujme-li zkřížená pole  $E_{\perp}$  a  $B$  (pole  $E$  je kolmé na  $B$ ) a počáteční rychlost částic  $v$ , urychlí se částice na takovou rychlost  $w$ , kolmou na oba vektory  $E$  a  $B$ , aby indukované elektrické pole kompenzovalo pole magnetické, tedy  $\vec{E}_{\perp} = \vec{E}_i$ . Potom

$$\vec{E}_{\perp} + \vec{w} \times \vec{B} = 0$$

a

$$\vec{E}_{\perp} \times \vec{B} = -(\vec{w} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \vec{w}B^2 - \vec{B}(\vec{w} \cdot \vec{B}) = \vec{w}B^2.$$

Konečná rychlost

$$\vec{w} = \frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2}$$

nezávisí na počáteční rychlosti  $v$ .

- d) Předchozí příklad c) můžeme zkomplikovat přidáním vnější objemové síly  $\vec{f}_\perp$ , o které předpokládáme, že je nezávislá na náboji částic. Pohybová rovnice (1.9.2) má potom tvar

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_\perp + \gamma \vec{E}_\perp \times \vec{B} - \gamma B^2 \vec{v}_\perp.$$

V ustáleném konečném stavu je levá strana nulová a  $v$  kolmých polích  $E$  a  $B$  se ustálí výsledná rychlost  $w$  podle předchozího příkladu. Její dosazení za součin  $\vec{E}_\perp \times \vec{B}$  vede k rovnici

$$0 = \vec{f}_\perp + \gamma \vec{w} B^2 - \gamma B^2 \vec{v}_\perp$$

- a výsledná příčná rychlost nabitých částic je  $\vec{v}_\perp = \frac{\vec{f}_\perp + \gamma \vec{w} B^2}{\gamma B^2}$ .

- e) Zajímavým a velice častým jevem, kdy se převádí magnetická energie na mechanickou jsou tzv. *magnetické pinče*. Prochází-li dostatečně silný proud prostředím s válcovou symetrií, vyvolá tento proud spolu s vlastním magnetickým polem objemovou sílu  $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$ , která stlačuje válec k ose. U kovových vodičů je deformace kompenzována pevností vazeb pevné fáze. V plazmatických proudových kanálech blesků a jiskrových výbojů dochází ke kompresi, která je však nestabilní a vede k rozpadu kanálu a přerušení proudu.

B) V některých případech lze vodivost prostředí pokládat za nekonečně velkou. Potom je magnetické pole zamrzlé do vodivé tekutiny. Uvedeme některé typické projevy:

- magnetické silokřivky brání bočnímu pohybu plazmatu
- silokřivky se snaží zkrátit natolik, co dovolí odpor stlačeného prostředí
- při vychýlení z rovnovážné polohy se projevuje harmonická síla, prostředí koná kmity
- velká magnetická napětí mohou vést k nestabilitám
- nehomogenity v rychlostech, hustotách a magnetických polích vedou ke vzniku vírových struktur a magnetohydrodynamické turbulenci
- víry a turbulentní struktury mají tendenci za určitých podmínek v dost širokém rozsahu parametrů se spojovat do větších shluků, vláken a kompaktních struktur
- magnetické pole ve spojení s víry a mechanickým pohybem látky je schopno vytvářet struktury s vysokou organizovaností
- strukturou organizovanosti je tzv.  $\alpha$ -efekt, při němž dochází k vzájemné transformaci poloidálního a toroidálního magnetického pole,  $\alpha$ -efekt je základním prvkem pro magnetické dynamo, vytvářející planetární a hvězdná magnetická pole
- vodivé fluidum v magnetickém poli je zdrojem široké škály plazmatických vln.

## 2. MAGNETOHYDROSTATIKA

se zabývá stacionárními stavy plazmatu v magnetickém poli, kdy dochází k vyrovnání magnetických a mechanických sil. K realizaci takové rovnováhy dochází pouze v omezeném časovém úseku, kdy lze magnetické pole považovat za zamrzlé. Označme  $\tau$  čas, během něhož proběhne vzruch charakteristický rozměr plazmatu Alfvénovou rychlostí. Označme  $\Delta t$  čas úniku magnetického pole. Potom jednou podmínkou stacionarity je  $\tau \ll \Delta t$ . Druhou podmínkou rovnováhy je platnost stacionární pohybové rovnice

$$0 = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{j} \times \vec{B} - \vec{\nabla} p$$

a třetí podmínkou je splnění nerovnosti, že difúzní a driftová rychlost je mnohem menší než rychlost mechanická a Alfvénova.

Velmi důležitou vlastností magnetohydrodynamiky vystihuje teorém viriálu: „Nelze vytvořit takovou konfiguraci magnetického pole v níž by magnetické síly kompenzovaly síly mechanické, vznikající uvnitř plazmatu v důsledku těchto polí“.

Rovnovážné poměry v plazmatu lze tudíž aplikovat pouze na omezenou část objemu a pole po určitý omezený časový interval. Rovnovážnými strukturami mohou být válcové pinčované proudové kanály a toroidální a bezsilové konfigurace polí a proudů.

### 2.1 Rovnovážný magnetický pinč

Prochází-li proud stlačitelnou vodivou tekutinou s válcovou symetrií podél osy, působí Ampérova síla objemovou silou  $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$  ve směru k ose. V případě, že magnetický tlak  $\frac{B^2}{2\mu}$  převyšuje tepelný tlak plazmatu  $\sum nkT$ , dochází ke smrštění poloměru proudového kanálu, nazývanému z-pinč. Podmínkou pinčového jevu je, jak již bylo uvedeno, dostatečně krátký čas komprese, kratší než je doba difúze magnetického pole. Při vyrovnání magnetického a tepelného tlaku (v tzv. rovnovážném pinči) platí rovnost

$$\frac{B^2}{2\mu} = \sum_{a=1}^k n_a k T_a . \quad (1.11.1)$$

Při krátkých časech existence pinčového jevu  $\sim \mu s$  se uplatňuje tzv. skinový efekt, kdy proud protéká pouze povrchovou válcovou plochou. V tomto případě lze magnetické pole v místě válcové plochy poloměru  $r$  od osy vyjádřit přibližným výrazem

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} . \quad (1.11.2)$$

Velmi často se setkáváme s případem jednonásobně ionizovaného rovnovážného plazmatu, kde  $n_e \approx n_i$  a  $n_e k T_e \approx n_i k T_i$ . Rovnost (1.11.1) lze upravit pomocí (1.11.2) na tvar:

$$\frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} = 2n_e k T_e .$$

Index  $e$  se vztahuje k elektronům a  $i$  k iontům.

Proudy v pinčových kanálech mají rozsah 10 kA – 10 MA, poloměry pinčových válců jsou  $\sim 1$  mm a vytvořené tlaky  $10^7 - 10^{13}$  Pa představují nejvyšší možné tlaky dosažitelné v pozemských laboratořích. Magnetická pole mají hodnoty od T – kT. Magnetické pinče jsou jakýmsi přirozeným koncentrátorem energie a lze jimi vytvořit plazma s velmi vysokou hustotou energie.



Teplotu pinčovaného sloupce můžeme určit z energetické bilance následujícím způsobem. Dominantním zdrojem energie v pinči je Jouleovo teplo. Za jednotku času se uvolní energie

$$W_J = I^2 R = I^2 \frac{l}{S\gamma},$$

kde  $R$  je odpor,  $l$  délka a  $S$  průřez sloupce. Odvod tepla se děje zářením. Za předpokladu, že magnetický pinč vyzařuje energii jako absolutně černé těleso, můžeme pro výpočet použít Stefan – Boltzmannova zákona, kde výkon vyzařený jednotkovou plochou je určen vztahem

$$W_e = \sigma T^4,$$

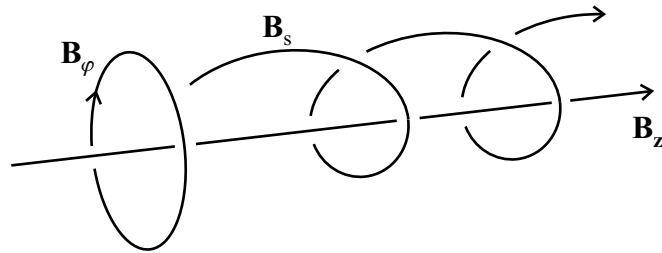
$\sigma$  je Stefan – Boltzmannova konstanta  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ . Při teplotách dosažených v magnetických pinčích  $10^5 - 10^6 \text{ K}$  je vyzařování v UV a měkké rentgenové oblasti o energiích  $10 - 100 \text{ eV}$ .

S magnetickými pinči se setkáváme v přírodě v bleskových výbojích, ve hvězdných atmosférách při erupcích a výbuchu jader některých galaxií. V magnetických pinčích dochází k velmi významným nerovnovázným a netepelným jevům. Při vysokých hustotách v silných elektrických a magnetických polích dochází ke vzniku energetických elektronových a iontových svazků s energiemi keV – MeV doprovázené pulsy tvrdých rentgenových paprsků. Doba sevření plazmatu je mnohonásobně delší než odpovídá tepelné vodivosti. Při deuteriové náplni se detekují uvolněné neutrony. Tyto exotické vlastnosti ukazují na to, že v silných elektrických a magnetických polích při vysokých hustotách energií a vysokých koncentracích plazmatu dochází k samoorganizovaným projevům, jejichž souvislosti a příčinnosti ještě nejsou zcela jasné. Velice rychlé přelévání koncentrované energie vede ke vzniku nestabilit, explozím a rozpadu pinče. Magnetické pinče jsou využívány jako relativně levný zdroj energetických iontů, elektronů a fotonů, jsou potenciálním zdrojem pro buzení rentgenových laserů a představují jednu z možností realizace jaderné fúze, způsobu výroby energie řízeným slučováním izotopů vodíku na helium, podobně jako je tomu ve Vesmíru ve hvězdách.

Magnetické pinče zřejmě budou hrát důležitou roli při realizaci jevů probíhajících dnes pouze ve Vesmíru v pozemských podmínkách. Existuje teoretická možnost tzv. zářivého kolapsu. Při proudech větších než  $1,7 \text{ MA}$  kanálem s poloměrem menším než  $0,1 \text{ mm}$  se energie dodaná Jouleovým ohřevem uvolňuje vyzářením. Záření je při vysokých hustotách a teplotách velice efektivní a nebrání kompresi plazmatu. Vysoká magnetická napětí tak mohou sevřit sloupec dostatečně velkou silou a vytvořit vysoké hustoty látky. Tímto způsobem bude zřejmě možné realizovat elektromagnetický kolaps, elektromagnetickou analogii gravitačního kolapsu známého z Vesmíru a potvrzeného existencí hvězdných trpaslíků, neutronových hvězd a černých děr. Jelikož je gravitační kolaps umožněn velkou hmotností objektů  $\sim 10^{30} \text{ kg}$  a elektromagnetická interakce je o 36 řádů intenzivnější než gravitační jsou možné analogické jevy při mg množstvích odděleného náboje.

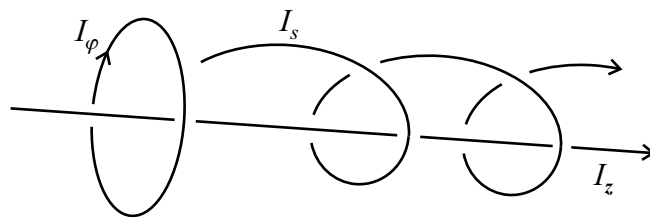
## 2.2 Helikální struktury

Zmínili jsme se o tom, že magnetické pinče stlačené azimutálním magnetickým polem jsou nestabilní. Větší stabilitu mají struktury se spirálovou (helikální) formou elektrického a magnetického pole. Lze se s nimi setkat například na slunečním povrchu ve formě filamentů a protuberancí. Ve vnějším silném magnetickém poli v důsledku zamrznutí mohou toky plazmatu proudit spíše podél silokřivek než v příčném směru. Podélné proudy vytvářejí magnetické pole kolmé na původní. Složením obou polí se vytváří magnetické pole spirálového tvaru, které zpětně ovlivňuje směr elektrického proudu a také jej stáčí do spirály. Magnetické silokřivky spirálového tvaru mají dvě komponenty magnetického pole,  $B_z$  a  $B_\phi$ .



Obr.2.1 :Helikální magnetické pole a jeho komponenty

Magnetické pole  $B_s$  je tvořeno proudem  $I_s$  s azimutální komponentou  $I_\phi$ , jež odpovídá axiálnímu magnetickému poli  $B_z$  a axiálnímu proudem  $I_z$  spojeným s azimutálním polem  $B_\phi$ . Situaci lze názorně zobrazit v případě, kdy kruhovou válcovou plochou s poloměrem  $R$  protéká proudem  $I_s$  s komponentou axiální  $I_z$  a azimutální  $I_\phi$ :



Obr.2.2: Helikální proud a jeho komponenty

Proudu  $I_z$  odpovídá pro velkou délku vodiče azimutální magnetické pole na povrchu válce

$$B_\phi = \frac{\mu I_z}{2\pi R}$$

a proudu  $I_\phi$  po povrchu axiální magnetické pole

$$B_z = \frac{\mu I_\phi}{R}$$

Stoupání spirály  $h$  vypočítáme z geometrie:

$$\frac{B_z}{B_\phi} = \frac{h}{2\pi R}$$

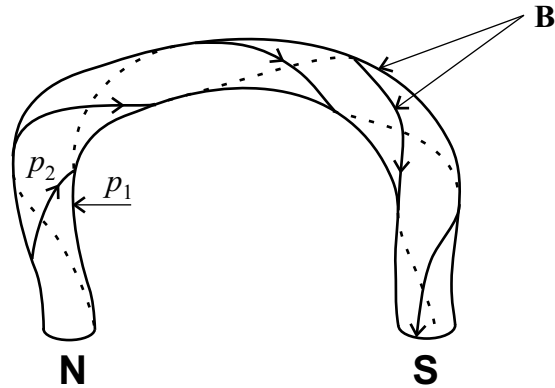
$$h = 2\pi R \frac{B_z}{B_\phi}$$

Příklad :

Arkády nad magnetickými skvrnami na slunečním povrchu:

Oblast slunečních skvrn je chladnější a hustší než okolní povrch Slunce. Zatímco sluneční povrch má teplotu  $\sim 6000$  K, je teplota slunečních skvrn  $\sim 4000$  K. Magnetické pole Slunce má velikost tisíců T a magnetické pole ve skvrnách je v desetinách T. Arkády magnetických toků nad skvrnami mají nižší teplotu než je teplota okolní chromosféry. Magnetické pole v arkádách má podle diagnostických výsledků helikální charakter, kde  $B_z > B_\phi$ . Vnější tlak  $p_1$  (obr. 2.3) je tvořen pouze tlakem vnějšího plazmatu  $\sum_{a=1}^k n_a k T_a$  a vnitřní tlak  $p_2$  má dvě složky,

část je tvořena vnitřním tlakem plazmatu  $\sum_{a=1}^k n'_a k T'_a$  a část stlačeným magnetickým polem  $\frac{B_z^2}{2\mu}$ . Arkády jsou stabilní útvary, které můžeme pozorovat po dobu týdnů až měsíců.



Obr.2.3: Magnetické pole slunečních skvrn

Dalšími příklady rovnovážných systémů jsou magnetická zrcadla a toridální a helikální trubice užívané rovněž jako systémy pro testování řízené jaderné fúze.

### 3. MHD DYNAMO

V roce 1919 Larmor řešil otázku, proč může být Slunce jako plynné a žhavé rotující těleso magnetem. U Země se v té době předpokládalo, že má pevné jádro a může být permanentním magnetem. Dnes, kdy víme, že vnitřek Země je v kapalném stavu s teplotou vyšší než Curieova teplota pro ferromagnetické vlastnosti, lze otázku rozšířit i na planety a další chladná rotující nebeská tělesa. Magnetické pole Jupiteru a Slunce je kolem tisíciny T, magnetické pole Země o řád nižší. Takto slabá magnetická pole u vzdálenějších hvězd nelze změřit, ale jsou známy hvězdy s vyšší rotací a s povrchovým magnetickým polem v řádu T. Magnetická pole trpaslíků a neutronových hvězd mohou být i kT. Rovina Galaxie s periodou oběhu  $3 \cdot 10^8$  let má magnetické pole  $3 \cdot 10^{-10}$  G. Larmor vyslovil tři možné hypotézy z nichž jedna je reálná i dnes: “rotující těleso s elektrickým vodivým fluidem může indukcí ve spojení s magnetickým polem indukovat takový proud, který generuje totéž magnetické pole”. Pro udržení magnetického pole hvězd a planet by tedy měl uvnitř těles probíhat jakýsi mechanismus dynama. Co je pro tento mechanismus důležité?

#### 3.1 Magnetické pole Země

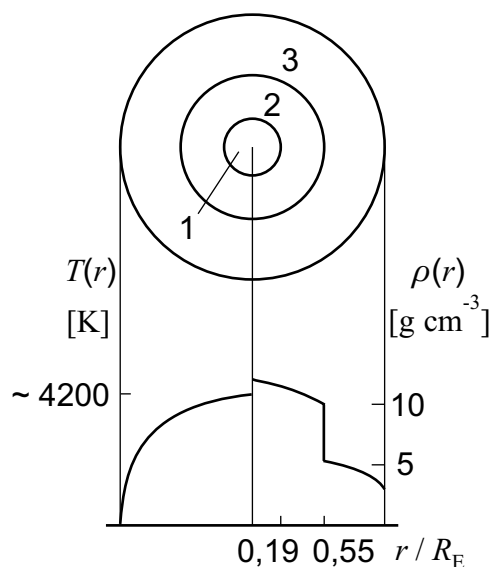
V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty magnetických polí planet sluneční soustavy.

Planeta	hustota ( $\text{kgm}^{-3}$ )	perioda (dny)	hustota mg. momentu
Merkur	5400	59	0,003
Venuše	5200	243	<0,0002
Země	5500	1.0	0,31
Mars	3900	1,026	0,0006
Jupiter	1300	0,41	3,61

Tab. 3.1: Velikosti hustot planetárních magnetických polí

Z vlastností registrovaných seismických vln je možné usuzovat, že zemské nitro obsahuje tekutou vodivou vrstvu. Podobně Jupiter má tekuté (vodíkové) jádro a pevný (vodíkový) plášť. Důležitá je dostatečná rychlost rotace. Obě vlastnosti jsou podstatné pro realizaci intenzivní Coriolisovy síly. Venuše má stejnou hustotu a pravděpodobně i stejné jádro, ale rotuje velmi pomalu a to je zřejmě hlavní příčina proč u ní nenaměříme magnetické pole. Mars má podobnou rotační rychlost jako Země, ale malé hustotě odpovídá jiné složení jádra. Není ze železa jako u Země, ale zřejmě z křemíku a je tedy nevodivé.

Zemské magnetické pole je dipólové. Země vykazuje dlouhodobé změny magnetického pole a zajímavé jsou časté změny polarizace. Počátky proměňování magnetického pole pochází od Gaussa z roku 1835. Paleomagnetické výzkumy, odhalují údaje magnetického pole při ochlazení hornin pod Curieův bod z počátku existence Země před  $3,5 \cdot 10^9$  lety. Další údaje je možné získávat z mořských sedimentů. Archeomagnetismus lidských výrobků dává údaje o remanentním magnetismu lidských výrobků za posledních 4000 let. V časovém měřítku posledních 10 000 let magnetické pole pokleslo o 50%. Rovněž směr se změnil.  $11^\circ$  odchylka magnetické a rotační osy se střední nulovou hodnotou ukazuje na relevanci rotačního napětí a induktivního toku v jádře. Během posledních 4 milionů let je střední doba jedné polarity asi 200 000 let. Změna polarity trvá asi 10 000 let. Magnetické pole přitom nejprve poklesne na 1/4 během několika set let, směr dipólové osy několikrát zakmitá s výchylkou do 30% a pak se překlápí do opačné orientace.



Obr. 3.1.: Vnitřní struktura Země - 1 vnitřní pevné jádro, 2 kapalné vnější jádro ze železa a lehčích prvků, 3 pevný plášť ze železo-magneziových křemičitanů.

#### *Parametry a stav spodního pláště zemské kůry a jádra.*

Základními parametry, které známe jsou hustota a teplota. Hustota pláště roste s poklesem poloměru - z  $3,4 \text{ g/cm}^3$  na povrchu na  $5,5 \text{ g/cm}^3$  na spodní straně pláště a vzrůstá na  $10 \text{ g/cm}^3$  v horní části tekuté fáze. Spodní část tekuté fáze má hustotu asi  $12 \text{ g/cm}^3$  a vnitřní pevné jádro má hustotu  $13-14 \text{ g/cm}^3$ . Teplota vzrůstá monotónně až na hodnotu  $4\,200 - 4\,300 \text{ K}$  uvnitř jádra. Tato velikost je odhadnuta z hodnot pro bod tání železa při vysokém tlaku. Vodivost jádra Země je  $3 \cdot 10^5 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  a spodní části pláště je  $2 \cdot 10^3 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

Kdyby se v zemském jádře neindukovaly elektrické proudy, magnetické pole by disipovalo a zaniklo během asi 150 000 let.

### 3.2 Sluneční magnetické pole

Sluneční magnetické pole je silně proměnné v prostoru i čase a je třeba rovněž uvažovat induktivní charakter jeho generace. Magnetické pole se vytváří ve vnější konvektivní zóně v oblasti  $0,8 - 1$  slunečního poloměru. Přirozený čas disipace a úniku magnetických siločar je  $4 \cdot 10^9$  let, což je právě stáří sluneční soustavy. To znamená, že pro stálé magnetické pole během krátké doby souvislých pozorování by nebylo třeba hledat mechanismus, současné pole by mohlo klidně být zbytkovým zamrzlým polem z počáteční kondenzace galaktického média. I lokální, časově proměnné jevy, jako je vývoj slunečních skvrn, lze vysvětlit jako události, provázející přítomnost tohoto pevného pole. Z tohoto důvodu až do 50tých let přetrvávala představa permanentního modelu slunečního magnetického pole. Teprve vývoj a použití slunečního magnetografu (1955) umožnily přímá měření poloidálního magnetického pole Slunce, objev změny orientace pole v letech 1957-8 a 1969-71 v době maxima sluneční aktivity a určení 22-leté periody cyklu variace slunečního magnetického pole. Tyto změny již hypotézou permanentního magnetického pole vysvětlit nejde. Je zajímavé, že teorie dynama měla původně vysvětlit existenci magnetického pole v dlouhém časovém období a u Slunce nyní vlastně zdůvodňuje velmi krátké variace, pro něž dnes nemáme jiná vysvětlení.

### Pozorované rychlostní pole

Slunce rotuje kolem osy skloněné o  $7^{\circ}15'$  vůči oběžné rovině Země s periodou asi 27 dnů. Rotace je nestejnoměrná, na rovníku je o 4 dny delší než na pólech. Tento zajímavý úkaz byl změřen z Dopplerova posuvu spektrálních čar na slunečním disku. Viditelný povrch Slunce není kompaktní, na povrchu jsou jasnější skvrny tzv. granule o rozměrech  $\sim 10^3$  km s časovou změnou detailů několika minut. Rychlostní fluktuace mají velikost 1 km/s, byly určeny také z Dopplerova jevu a jsou důsledkem konvektivní turbulence ve fotosféře.

Uvažujme charakteristický rozměr  $L \sim 10^3$  km a charakteristickou rychlost  $V \sim 1$  km/s pro turbulenci v konvektivní povrchové vrstvě Slunce. Pro kinetickou viskozitu

$\nu = 10^{-2} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  a magnetickou difuzivitu  $\eta \sim 10^5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  lze odhadnout Reynoldsovo číslo  $R_e = \frac{VL}{\nu} \approx 10^{11}$  a Reynoldsovo magnetické číslo  $R_m = \frac{VL}{\eta} \approx 10^4$ . Odtud se zdá, že magnetické

efekty jsou zanedbatelné vůči dynamickým.

### Sluneční skvrny a sluneční cykly

Na slunečním povrchu se občas pozorují tmavší skvrny o rozměrech  $10^4$  km. Vyskytují se maximálně do šířek  $\pm 35^{\circ}$  kolem rovníku. Rodí se v párech přibližně na stejné rovnoběžce a mají větší úhlovou rychlost než má okolní povrch. Vůdčí skvrna je vždy blíže k rovníku. Vzdálenost dvojice je  $\sim 10^5$  km. Vytváření páru je magnetohydrodynamickým jevem. Pravděpodobné vysvětlení předpokládá slabé poloidální pole s dipólovou symetrií a jakýsi mechanismus diferenciální rotace v konvektivní zóně Slunce, jenž generuje toroidální pole o řád větší než pole poloidální. Uvažujme trubici silného toroidálního pole  $B_{\phi} \sim 1$  T vnořenou do hloubky konvektivní zóny. Je-li tato trubice v dynamické rovnováze s okolím, má nižší teplotu a hustotu. Může se u ní projevit hadí nestabilita a při přiblížení k povrchu proniká ven. Silokřivky se prodlouží, napnou a mírně stočí toroidální orientaci. Toroidální pole je asymetrické vůči rovníku. Periodicita je  $2 \times 11$  let, a stejnou periodu mají i změny poloidálního pole.

Jak již bylo řečeno, některé hvězdy mají magnetická pole v desítkách T (78 Virginis – několikadenní variace 0,01 – 30 T). U hvězdných trpaslíků dosahují magnetická pole velikosti  $10^3 - 10^4$  T a u neutronových hvězd by měla existovat pole kolem  $10^8$  T.

### 3.3 Teorie MHD dynama

Pro generování magnetického pole v rotujících hvězdách nebo planetách musí být splněno několik podmínek. Prostředí musí být a) vodivé, b) tekuté aby se mohla uplatnit diferenciální rotace, kdy se vrstvy v různých sférách a rovnoběžných vrstvách otáčejí různou rychlostí a c) musí docházet k radiálnímu proudění mezi vnitřními a vnějšími vrstvami. Při splnění těchto podmínek dochází ve vzestupných a sestupných prouděch v důsledku Coriolisovy síly k vytváření vírů. Jelikož jde o vodivé prostředí, jsou pohyby částic spojeny se vznikem elektrických proudů a magnetických polí. Realizaci magnetohydrodynamického dynama ještě podstatně ovlivňují dvě další okolnosti. Jednou je fluktuace v hustotách a rychlostech a druhou samoorganizační schopnosti magnetických polí. Malé a náhodně indukované víry se mohou silově ovlivňovat interakcí dipólových magnetických polí a projevuje se tendence ke spojování do útvarů s větším uspořádáním a menší celkovou energií. Základní scénář pro takovýto vývoj představuje tzv.  $\alpha$  efekt.

### 3.4 $\alpha$ efekt.

Označme rozměr náhodných vlivů  $l_0$  a globální rozměr plazmatu  $L$ . Necht' platí relace  $l_0 \ll L$ . Podobně pro časová měřítka zavedeme označení:  $T$  globální čas,  $t_0$  je časové měřítko fluktuací a  $\tau$  střední časové měřítko. Pro čas necht' rovněž platí nerovnost  $t_0 \ll \tau \ll T$ . Pro střední, pomaleji se měnící hodnoty rychlosti  $U$  a magnetického pole  $B$ , je možné zavést vztahy:

$$\begin{aligned}\vec{U}(x,t) &= U_0(x,t) + u(x,t) & \langle u \rangle &= 0 \\ \vec{B}(x,t) &= B_0(x,t) + b(x,t) & \langle b \rangle &= 0\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} &= \text{rot}(\vec{U}_0 \times \vec{B}_0) + \text{rot} \varepsilon + \lambda \Delta \vec{B}_0 \\ \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} &= \text{rot}(\vec{U}_0 \times \vec{b}) + \text{rot}(\vec{u} \times \vec{B}_0) + \text{rot} \vec{G} + \lambda \Delta \vec{b}\end{aligned}$$

kde

$$\varepsilon = \langle u \times b \rangle, \quad G = \vec{u} \times \vec{b} - \langle \vec{u} \times \vec{b} \rangle.$$

Zdrojem fluktuačního magnetického pole  $b$  je výraz  $\text{rot} \langle \vec{u} \times \vec{B}_0 \rangle$ . Jelikož je závislost pole  $\varepsilon$  a pole  $B_0$  téměř lineární, lze ji vyjádřit tvarem:

$$\varepsilon_i = \alpha_{ij} B_{0j} + \beta_{ijk} \frac{\partial B_{0j}}{\partial x_k} + \dots$$

$\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ijk}$  jsou pseudotensory, protože  $\varepsilon$  je polární vektor a  $B_0$  je axiální vektor. Omezíme se na první člen rozvoje

$$\varepsilon_i^{(0)} = \alpha_{ij} B_{0j}.$$

Tenzor  $\alpha_{ij}$  lze rozložit na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^{(s)} - \varepsilon_{ijk} a_k.$$

Potom je

$$\varepsilon_i^{(0)} = \alpha_{ij}^{(s)} B_{0j} + (\vec{a} \times \vec{B}_0)_i.$$

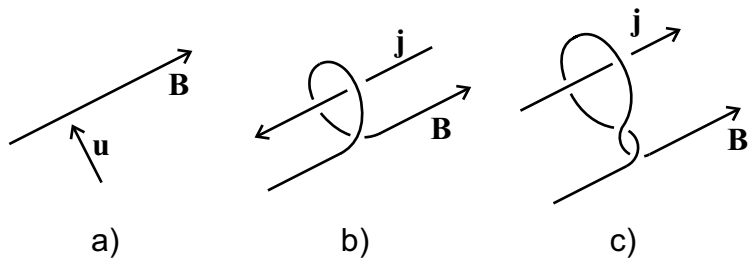
Je zřejmé, že asymetrická část vytváří dodatečný vektor  $\vec{a}$ , jakousi efektivní střední rychlost, která účinkuje s  $\vec{B}_0$  a vytváří se skutečnou střední rychlostí  $\vec{U}_0$  efektivní střední rychlost  $\vec{U}_0 + \vec{a}$ .

Pro  $\varepsilon^{(0)} = \alpha B_0$  a Ohmův zákon platí:

$$\vec{J} = \sigma \varepsilon^{(0)} = \sigma \alpha \vec{B}_0.$$

Uvedený induktivní proud  $\vec{J}$  tekoucí podél silokřivek odporuje běžným zvyklostem, kdy bývá proud kolmý jak na vektor rychlosti, tak na směr magnetického pole. Tento jev se nazývá  $\alpha$ -efekt a je srdcem moderní teorie dynama a poskytuje vysvětlení pro vzájemnou přeměnu poloidálního a toroidálního pole. Jelikož toroidální pole může být snadno generováno poloidálním polem při diferenciaci rotaci, umožňuje  $\alpha$ -efekt přeměnu toroidálního pole v poloidální a uzavření cyklu magnetického dynama.

Jak jsme uvedli, je  $\alpha$ -efekt nenulový pouze v případě reflexní asymetrie rychlostního  $u$ -pole, kdy střední helicity  $\langle \vec{u} \cdot \vec{\omega} \rangle$  není nulová. Pro názorné pochopení fyzikální podstaty  $\alpha$ -efektu uvažujme situaci na obr.3.2.



Obr. 3.2: Model  $\alpha$ -efektu

Cykloidní událost rychlostního pole  $\vec{u}$  a  $\text{rot } \vec{u}$  vytváří proud

$$I = \int (\vec{u} \cdot \text{rot } \vec{u}) dV \neq 0$$

Tato událost vychýlí a stočí silokřivku počátečního pole  $\vec{B}_0$ . Každá smyčka je spojena s elementárním povrchovým proudem a prostorová střední hodnota těchto proudů bude mít tvar

$$\vec{J} = \sigma \alpha \vec{B}_0$$

Je zřejmé, že uvedený proces může být oslaben difuzí.



## 4 PŘÍKLADY

### 4.1 Magnetohydrodynamická turbulence

Magnetohydrodynamická turbulence představuje jednu z velkých záhad fyziky plazmatu. Setkáváme se s ní v proudícím nehomogenním a vysoce energetickém plazmatu. Je typickým příkladem organizované struktury s vysokou hustotou energie.

O jednodušší hydrodynamické turbulenci víme, že se při ní vytvářejí víry v proudech při rychlosti přesahující rychlost zvuku. Při dalším vývoji se přenáší část rotační energie do oblasti mezi víry, kde se formují víry střední velikosti. Do nich se postupně přenáší původní energie velkých vírů. Na okrajích vírů střední velikosti se postupně tvoří malé víry. Energii čerpají ze středně velkých vírů. Teprve malé víry mohou zanikat disipativním způsobem, kdy se rotační energie mění na teplo. Turbulentní víry jsou tedy konzervátorem mechanické energie a při jejich vývoji se organizované struktury rozdrobují a zanikají.

Magnetohydrodynamická turbulence představuje složitější jev. Kromě rotační mechanické energie je třeba uvažovat energii magnetickou. Víme jak komplikovaná je vazba při vzájemném pohybu vodivé tekutiny a magnetických polí. Vzhledem k rotaci a vírovému charakteru magnetického pole mají struktury dipólový nebo multipólový charakter.

Turbulentní charakter proudění vzniká zejména při rychlostech přesahujících Alfvénovu rychlost. Je možné se s ním setkat v plazmatu vytvořeném fokusovanými laserovými svazky a v plazmatu generovaném tokamaky. V obou uvedených případech je turbulence nežádoucím jevem, absorbujícím velké procento energie dodávané na zahřívání plazmatu.

Turbulence v plazmatu s vysokou hustotou energie nemusí mít pouze negativní projevy, pokud bude možné využívat její energetickou kapacitu a samoorganizační schopnosti. Jako příklad lze uvést vlastnosti elektromagnetických vírů v případě výše uvedeného dynama nebo v plazmatu magnetických pinčů a plazmatu obklopující trysku plazmatronu. (Oba druhy turbulence byly vizualizovány pulzním neodymovým laserem na katedře fyziky FEL ČVUT.)



Obr.4.1: Šlířová fotografie turbulencí v magnetickém pinči

Na fotografii 4.1 jsou zřetelné dvě konické elektrody ve skutečné vzdálenosti 1 cm a světlý kanál sudovitého tvaru je obrazem plazmatu, jímž protéká proud několika desítek kA.

Uvolněné Jouleovo teplo ionizuje plyn dusík s počátečním tlakem několika desetin atmosféry a vytváří plazma o teplotě  $\sim 20\,000\text{ K}$ . Vlastní magnetické pole v proudovém plazmatickém kanále je v rozmezí  $0,1 - 1\text{ T}$  a Ampérova síla urychluje elektrony spolu s ionty k ose výboje, kde jsou u elektrod patrné 2 husté sloupečky stlačeného plazmatu. Důsledkem této komprese a jejího minima ve střední části mezi elektrodami představují sloupce trysky plazmatu vyvrhující svůj obsah proti sobě. V místě srážky pozorujeme kulový tvar složený z drobných kuliček jako u hlávky kvěťáku velikosti  $0,5 - 1\text{ mm}$ . Tyto kuličky, interpretované jako víry, jsou kompaktní a stabilní po dobu  $\sim 100\text{ ns}$ . Občas lze v tomto místě pozorovat spirálové stopy podobné tornádu. Jsou obrazem výtrysku plazmatu při rozpadu víru a ukazují na vysokou vnitřní koncentraci energie. Zajímavá je skutečnost, že teplota plazmatu trysek i turbulencí je nízká,  $2\,000 - 5\,000\text{ K}$ , tedy nižší než teplota obklopujícího plazmatu. Toto zjištění je překvapivé z toho důvodu, že bychom v důsledku srážek a přeměny mechanické energie v tepelnou očekávali spíše vyšší teplotu. Nízká teplota potvrzuje hypotézu konverze kinetické energie do mechanické rotační a magnetické. Jakoby magnetické pole turbulencí vytvářelo jakýsi nárazový nedisipativní polštář, v němž se při přiblížení dvou vírů zvyšuje rotační rychlost, elektrické proudy a magnetická pole.

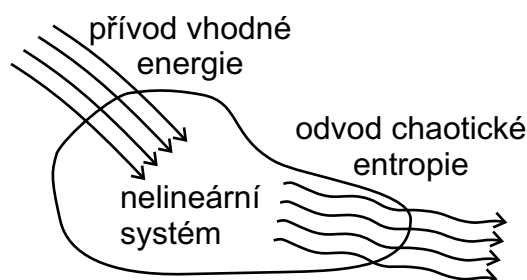
Při podobných experimentech v argonové náplni byl výsledek ještě zajímavější. V centrální části se nevytvářela kvěťáková struktura ale kompaktní kulová homogenní forma s ostrým, gradientem hustoty na povrchu. Lze předpokládat, že v tomto případě došlo ke spojení jednotlivých malých vírů do jednoho útvaru. Příčinu lze hledat v možnosti argonu intenzivněji vyzařovat vnitřní energii v optické oblasti v porovnání s dusíkem nebo vzduchem, v možnosti vytvoření vhodnějšího prostředí pro organizovanou výslednou formu s nižší výslednou energetickou hladinou.

Z předcházejícího popisu je zřejmá i další výrazná vlastnost MHD turbulencí, možnost samoorganizace a vytváření vírů s většími rozměry. Tento projev je výrazně odlišný od hydrodynamické turbulence, kde dochází naopak ke drobení vírů a energetické disipaci rotační energie do tepla. V případě dipólového charakteru magnetického pole turbulencí lze očekávat jejich vzájemné silové ovlivňování, stáčení, radiální odpuzování a axiální přitahování. Při vytváření turbulentních vírů a jejich následném vývoji, jak se zdá, dochází k zesílení magnetických polí i kinetické rotační energie a uplatňuje se zřejmě jak  $\alpha$ -efekt tak celý proces MHD dynamika. Turbulence je příkladem koncentrátoru a konzervátoru energie. Záhadou je, jaká je vnitřní struktura vírů, jak vypadá rozložení proudů, magnetických polí a rotačních mechanických pohybů. Pro model přichází v úvahu několik variant – toroidální formy, sféromaky se zpětným magnetickým polem na povrchu a uzavřené struktury se složitým magnetickým polem. Problém turbulence se řeší statisticky a na úrovni 3D simulací. V energetických úvahách se vychází z ekvipartičního teorému rovnosti rotační mechanické a magnetické energie.

## 4.2 Organizované struktury

V případě MHD dynamika a turbulencí se setkáváme s výrazným projevem samoorganizace. Samoorganizací rozumíme proces, kdy vznikající objekt má nižší entropii. Tento jev bývá většinou spojován s projevy živé hmoty. Samoorganizaci můžeme pozorovat při vývoji Vesmíru jako celku i u jednotlivých jeho částí. Na jedné straně roste chaos a stoupá entropie, a na druhé straně se v určité fázi vývoje vytváří lokálně vyšší forma hmoty s nižší entropií. Důležitou roli v tomto procesu hraje magnetické pole. Lze uvést teorii presentovanou Prof. Sato, odborníkem na magnetohydrodynamické simulace z Nagoyi v Japonsku.

Podle této teorie je podmínkou pro simulaci samoorganizačních procesů existence otevřeného nelineárního systému popsaného magnetohydrodynamickou teorií s konečnou vodivostí. V otevřeném a nelineárním systému musí být zajištěn přívod vhodné energie (prvek informace) a odvod přebytečné entropie podle schematického obrázku:



Obr. 4.2 : Schéma samoorganizujícího se systému

Blokové vývojové schéma lze popsat následujícím způsobem:

- 1) existence otevřené struktury
- 2) napumpování systému volnou energií
- 3) rozvoj nestability systému
- 4) vznik silně napětového stavu
- 5) existence strukturálního modelu s možností bifurkace – zhroucení / samoorganizace
- 6) anomální produkce entropie – růst chaosu
- 7) vypuzení entropie – uvolnění části s vysokým stupněm chaosu
- 8) vznik nového organizovaného systému s dvojnásobnou možností. Při nové vhodné energii lze pokračovat bodem 1) a při nedostatku vhodné energie dochází k disipaci a rozpadu.

#### 4.3 Vlastnosti neideálního plazmatu

Neideálním plazmatem se rozumí plazma, kde vazbová potenciální energie částic je srovnatelná s kinetickou energií. Pro vyjádření potenciálové coulombovské energie je možné použít výraz

$$W = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} n^{1/3},$$

kde  $n$  je hustota částic. Kinetickou energii je možné vyjádřit teplotou  $E \approx kT$ . Pro stanovení míry neideálnosti se zavádí koeficient neideálnosti

$$C = \frac{W}{E} \geq 1.$$

Neideální plazma vytváří prostředí s vysokými hustotami a nízkými teplotami, je mezioborem fyziky plazmatu a fyziky pevné fáze. Je to prostředí, kde mohou probíhat fázové přeměny a vznikat organizované struktury. Vysoká potenciální energie umožňuje velkou korelační délku a projevy kolektivního chování a makroskopických kvantových vlastností.

Jaké jsou základní charakteristické projevy neideálního plazmatu? Především je to malý počet částic v Debyeově sféře (menší než 1). Jelikož Debyeova sféra je oblast, v jejíž rozměrech se projevuje coulombovská interakce, znamená zmíněná podmínka, že každá částice je obklopena vlastní potenciální bariérou.

Další charakteristickou vlastností neideálního plazmatu je malá střední vzdálenost částic daná vztahem  $r_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ . Jinou charakteristikou je tzv. *amplituda rozptylu*  $f$ , jakýsi střední poloměr působení sil mezi částicemi. Představuje vzdálenost, při níž je střední potenciál interakce mezi částicemi roven kinetické energii:  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 f} = kT$ , odkud je

$$f = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 kT}.$$

Amplituda rozptylu souvisí s *účinným průřezem srážek*  $Q$ :  $f \approx \sqrt{Q}$ .

Neideální plazma charakterizuje také malá velikost střední volné dráhy částice (v porovnání s jejím rozměrem) daná vztahem

$$l = \frac{1}{\lambda Q}.$$

Pro určení stupně degenerace je důležité porovnání střední vzdálenosti částic s rozměrem atomu a pro možnost makrokvantových konfigurací je důležitá *de Broglieova střední tepelná délka vlny elektronu*:

$$\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}.$$

Z uvedených charakteristik je možné odvodit různá kritéria neideálnosti plazmatu:

1) stupeň degenerace  $A$  je dán podílem  $A = \frac{\lambda_B}{r_n}$ .

V případě  $A < 1$  lze použít Maxwell-Boltzmannovu statistiku ideálního plazmatu, pro  $A > 1$  pro částice se spinem  $1/2$  statistiku Fermi-Diracovu a pro bosony s celočíselným spinem statistiku Bose-Einsteinovu. U laboratorního plazmatu je neideálnost určena hranicí teploty  $< 10^4$  K a hustotou elektronů  $n_e > 10^{26} \text{ m}^{-3}$ .

Kriteriem kvantových vlastností je podíl  $\frac{\lambda_B}{f}$ . Pokud je hodnota  $\ll 1$ , je možné použít klasický přístup. Kvantový přístup je třeba uvažovat pro elektronovou komponentu pro Coulombovu interakci v případě  $\frac{\lambda_B kT}{4\pi\epsilon_0 e^2} \gg 1$ .

Reálná možnost existence kvantových makrostavů je dána podmínkou  $r_n \approx \lambda_B \approx r_D$ .

Kriteriem kvantového stavu je rovněž velikost elektrostatického odstínění  $\frac{\lambda_B}{r_D}$ . Tento výraz je významný při výpočtu kvantomechanické statistické sumy.

Důležitým kriteriem pro neideálnost plazmatu je podíl  $\frac{r_n}{f}$ , nebo  $\frac{E}{W}$ .

Neideální plazma představují např. volné elektrony v kovu s kinetickou energií odpovídající Fermiho energii. Základním kriteriem je již zmíněný počet částic mnohem menší než 1 v Debyeově sféře.

Jako další příklad lze uvést podmínku pro plazmatický elektrostatický kluster, kde pro jednoduchost a názornost předpokládejme  $n_e \sim n_i$ . V takovémto plazmatu je střední

vzdálenost mezi elektrony nebo ionty  $r_{ii} \approx r_{ee} \approx \frac{1}{\sqrt[3]{n_e}} \approx \frac{1}{\sqrt[3]{n_i}}$  větší než střední vzdálenost mezi opačně nabitými částicemi  $r_{ie} \approx \frac{1}{\sqrt[3]{2n_e}}$ .

Při dostatečně malé kinetické energii v takovémto plazmatu je Coulombovská přitažlivá energie větší než odpudivá energie. Podmínka pro vázaný stav je zřejmě dána nerovností:

$$\frac{1}{2}kT \leq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}(2n_e)^{1/3} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}(n_e)^{1/3},$$

odkud lze odvodit podmínku  $kT \leq 6 \cdot 10^{-29} \sqrt[3]{n_e}$ .

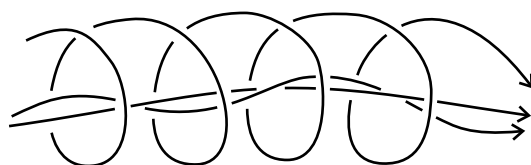
Maximální teplota  $T$  pro různé elektronové hustoty je uvedena v následující tabulce:

$T_e$ (K)	600	750	1800	3700	7500	18000
$N_e$ ( $m^{-3}$ )	$5 \cdot 10^{24}$	$10^{25}$	$10^{26}$	$10^{27}$	$10^{28}$	$10^{29}$

#### 4.4 Elektrické dvojvrstvy

Příkladem organizované struktury může být elektrická dvojvrstva vytvořená plazmatickým proudovým kanálem v silném vlastním magnetickém poli.

Předpokládejme izotermické plazma teploty  $T$  a helikální tvar elektrického a magnetického pole v rovnovážném pinčovém kanále a necht' elektrický proud teče povrchem válce o poloměru  $R$  (obr.4.3).



Obr.4.3 : Schéma magnetických silokřivek v proudovém kanále

V izotermických podmínkách pro  $T_e \approx T_i$  jsou rovny střední kinetické energie:  $m_i v_i^2 \approx m_e v_e^2$ . Lze odvodit nerovnost:

$$\frac{m_e}{m_i} = \frac{v_i^2}{v_e^2} < \frac{v_i}{v_e}$$

Hybnost elektronů je zanedbatelná vůči hybnosti iontů:  $m_e v_e < m_i v_i$ .

Z rovnosti Lorenzovy odstředivé síly a odstředivé síly lze vypočítat Larmorův gyrační poloměr kruhové dráhy nabitě částice. Z rovnosti

$$\frac{mv^2}{R} = eB_z v$$

vyplývá podmínka  $R = \frac{mv}{eB_z}$ . Pro ionty je zřejmě gyrační poloměr mnohem větší než pro

elektrony. Poloměr proudového kanálu určují ionty. Larmorův gyrační poloměr elektronů je asi o 2 řády menší, ale vzhledem k velkým polarizačním silám nemohou být elektrony vzdáleny od iontů více než je Debyeův poloměr. Existuje tedy možnost separace elektronů a iontů, tzv. elektrické dvojvrstvy, kde ionty tvoří vnější plášť a elektrony vnitřní vrstvu.

Elektrony přenáší proud téměř beze srážek s malým odporem a ionty tvoří v modelu této organizované struktury jakýsi krunýř.

Za předpokladu rovnosti tlaku kinetického a axiálního magnetického pole  $2n_e kT_e = \frac{B_z^2}{2\mu}$  a při rovnováze  $2nekTe + \frac{B_z^2}{2\mu} = \frac{B_\phi^2}{\mu}$  platí vztah  $\frac{B_z^2}{\mu} = \frac{B_\phi^2}{\mu}$  a tedy  $B_z = B_\phi$ .

Proudům  $I_z$  a  $I_\phi$  odpovídají přibližně magnetická pole

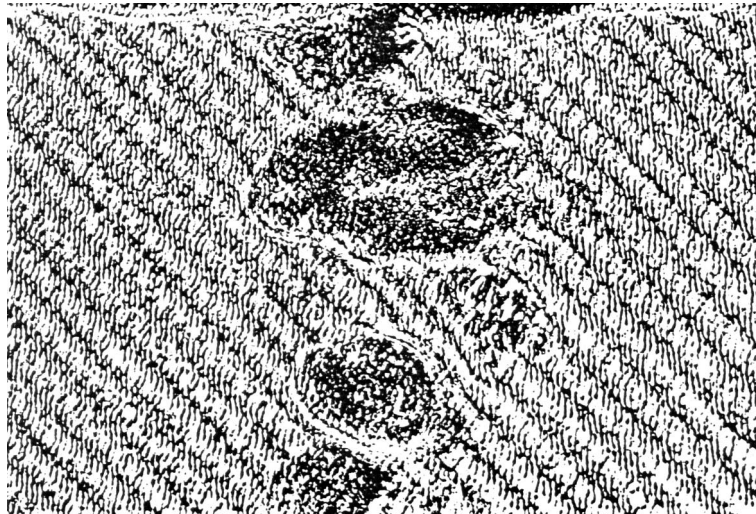
$$B_\phi = \frac{\mu I_z}{2\pi r} \quad a \quad B_z = \frac{\mu I_\phi}{2r} .$$

Podmínkou rovnováhy je tedy:  $\frac{I_z}{I_\phi} = \frac{1}{\pi}$

#### 4.5 Generace plazmoidů

Při diagnostice vysoce energického plazmatu jsou často pozorovány kulovité útvary větších rozměrů než turbulentní víry. Vznikají většinou při fázi rozpadu magnetického pinče. Charakterizují je kompaktnost, vysoká hustota plazmatu a explozivní charakter zániku.

Při rozpadu pinčového sloupce je rozšiřující se kanál doprovázen opět generací axiálního magnetického pole a větší helicitou proudových trubic. Některé závity se při větším přiblížení sousedních stěn spojují a uzavřou do toroidálního věnce, který následně zmenšuje svůj vnitřní průměr a posléze se přemění na kulový plazmoid. Takovýto kulovitý útvar končí svou existenci náhle intenzivním a prudkým výbuchem. (Obr.4.4)



Obr.4.4: Vznik kulové struktury při rozpadu magnetického pinče



Obr.4.5: Kulová struktura po emisi rentgenového pulsu

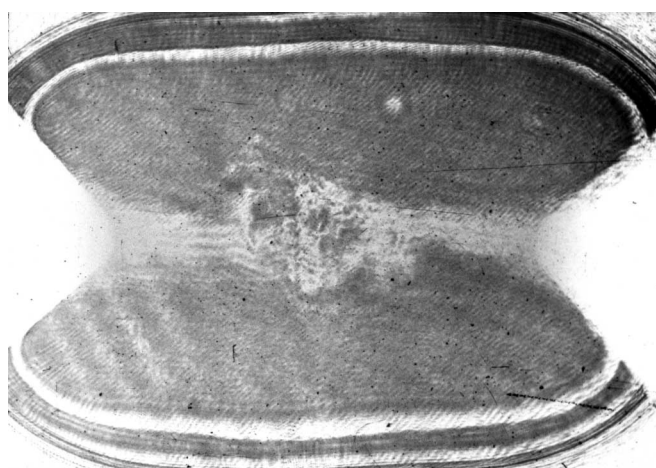
Jiným typem kulových struktur jsou útvary vzniklé rozvojem neck – nestability, kdy se kolem malého jádra, z něhož se uvolní vysoce energetický a neteplný rentgenový puls (tzv. horké tečky), vytváří husté a kompaktní jádro. Tento vývoj je ukázkovým příkladem vzniku organizované struktury, kdy se energie načerpaná pinčem vyzáří ve formě rentgenového pulsu, čímž se odvede chaotická část energie s vysokou entropií a chladný zbytek plazmatu může být sevřen kompaktním magnetickým polem (Obr.4.5)

Jiný druh plazmoidů vzniká v konické konfiguraci elektrod mezi dvěma vstřícnými tryskami pinčujícího se plazmatu popisovaného ve stati o turbulenci.



Obr.4.6: Plazmoid v argonové náplni

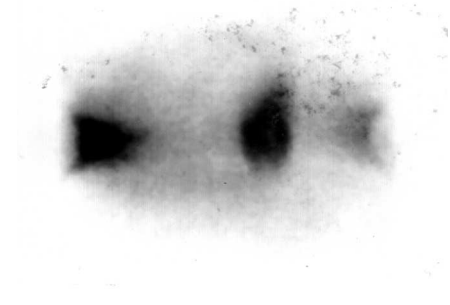
Při výboji v náplni vzduchu nebo dusíku při tlaku několik desetin atmosféry se mezi elektrodami vytvářel útvar analogický kvěťkové hlávce a v náplni argonu kompaktní útvar, který narůstal po dobu 1  $\mu$ s a zůstal po přerušení proudu bez dalších výrazných změn několik dalších mikrosekund a končil svou existenci prudkou explozí. Průměr těchto plazmoidů je několik mm, hustota  $10^{25} \text{ m}^{-3}$ , generující proudy několik desítek kA a magnetická pole  $\sim 1 \text{ T}$ . Plazmoidy svými vlastnostmi připomínají kulové blesky. Nabízí se otázka, zda skutečné kulové blesky nemohou vznikat podobným způsobem.



Obr.4.7: Plazmoid při atmosférickém tlaku a proudu 100 kA

Ověřovací experimenty probíhaly v laboratoři v Institutu fyziky plazmatu a laserové mikrofúze ve Varšavě, používané pro testování odolnosti letadel vůči bleskům. V roce 1994 jsme realizovali experiment, kdy byl bleskový výboj modelován baterií s napětím 100 – 200 kV a celkovou energií asi 30 kJ, kde se proud 40 – 100 kA rozvíjel po dobu 10  $\mu$ s. Tímto způsobem jsme vyrobili kuličku velikou asi 1 cm, rostoucí několik  $\mu$ s a explodující však dříve, než proud dosáhl maxima (obr.4.7).

Na základě zkušeností jsme připravili a realizovali experimenty v následujícím roce, kdy se prodloužila doba nárůstu proudu na 50 ms, použitá baterie měla energii 500 kJ a proudy dosáhly 200 – 400 kA. Jelikož napětí mezi elektrodami bylo nižší, 20 – 30 kV, byly elektrody spojovány tenkým měděným drátkem. I při těchto experimentech byl pozorován plazmoid a průměrem několika cm s dobou života desítek ms, zanikající intenzivní explozí v době maxima proudu.



Obr.4.8: Plazmoid při atmosférickém tlaku a proudu 400 kA.

Při uvedených experimentech se podařilo vytvořit kompaktní plazmoid s magnetickým udržením. Doba života však byla kratší než půlperioda proudu, nepodařilo se vhodně odvést přebytečnou tepelnou energii a plazmoid dostatečně ochladit.

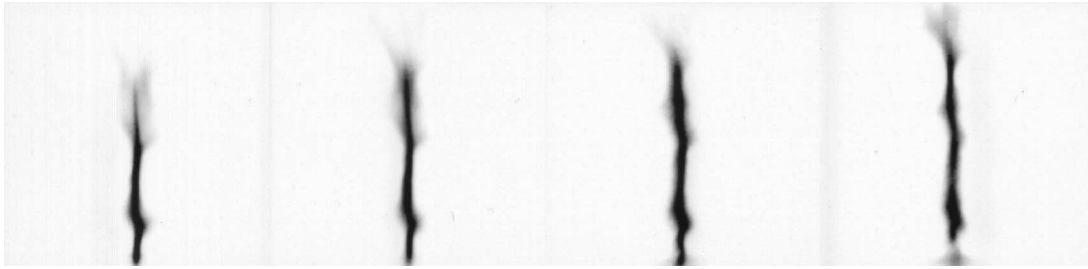
#### 4.6 Vývoj pinčové fáze

Významnou vlastností magnetických pinčů je generace energetických elektronů, iontů a netepelného rentgenového záření ve fázi maximální komprese. Ucelená kvalitativní teorie vysvětlující následnost jednotlivých diagnostických výsledků vychází z modelu  $\alpha$ - efektu, kdy se při implozi i explozi plazmatu generuje axiální komponenta magnetického pole  $B_z$ . Charakter globálního vývoje je patrný z obr.4.9.

Při kompresi je na některých snímcích imploze patrný spirální tvar sloupce plazmatu. Lze předpokládat, že se uplatní  $\alpha$ - efekt. Podmínkou tohoto jevu jsou nehomogenity v rychlostech, magnetických polích a v hustotách plazmatu při vzájemném příčném pohybu plazmatu a magnetického pole. Orientace spirály je náhodná, může být jak pravotočivá, tak levotočivá. Při urychlení plazmatu magnetickou Amperovou silou dochází k přeměně energie azimutálního magnetického pole na energii kinetickou a v důsledku  $\alpha$ - efektu částečně i v energii vznikajícího stlačovaného axiálního magnetického pole  $B_z$ . Ve fázi maximální komprese, kdy má stlačený sloupec nejmenší poloměr se veškerá kinetická energie přemění částečně na teplo a částečně na stlačené podélné magnetické pole. Tlaková rovnováha může být v tomto případě vyjádřena jednoduše za předpokladu, že proud při vlivu skin efektu protéká pouze válcovým povrchem stlačeného sloupce. Potom v místě poloměru  $R$  platí:

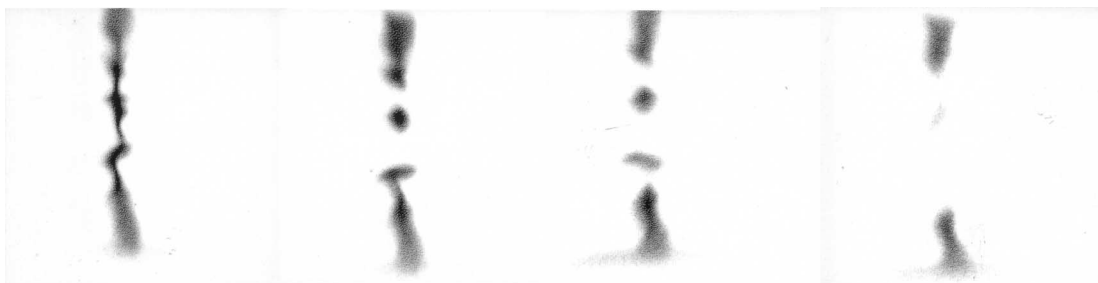
$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{B_\phi^2}{\mu} = \sum n_a k T_a + \frac{B_z^2}{2\mu} .$$





Obr.4.9: Formování magnetického pinče

Helicita, stoupání spirály není, jak ukazují experimenty, konstantní podél délky pinče. Pravidelně se střídají místa s menší a větší helicitou, projevující se užším nebo širším průměrem pinčového sloupce. Užší místa se nazývají necks (hrdla) a širší nodes (hrby). Stabilita této konfigurace je časově omezená a trvá maximálně několik desítek ns. V některých výbojích lze pozorovat periodická zvětšení a zmenšení průměru. Vlastní rozpad sloupce je odstartován zúžením hrdla. Obsah hrdla je vržen do sousedních nodů a na několik ns se vytvoří tenké vlákno. V tomto okamžiku lze detekovat emisi netepelného rentgenového záření. Po několika nanosekundách se vlákno rozpadá. Současně s kompresí hrdel se pozoruje expanze nodů. Emise rentgenů je pravděpodobně způsobena energetickými elektrony urychlenými pinčujícími se hrdly. Urychlující elektrické pole je spíše induktivní než rezistenční a může být indukováno změnou geometrie plazmatického válce a změnou topologie magnetického pole při přeměně axiálního pole na azimutální. Po emisi netepelného rentgenového záření se pozoruje vznik kompaktní a stabilní kulové struktury zmíněné v kapitole o organizovaných kulových strukturách.



Obr.4.10: Rozpad magnetického pinče

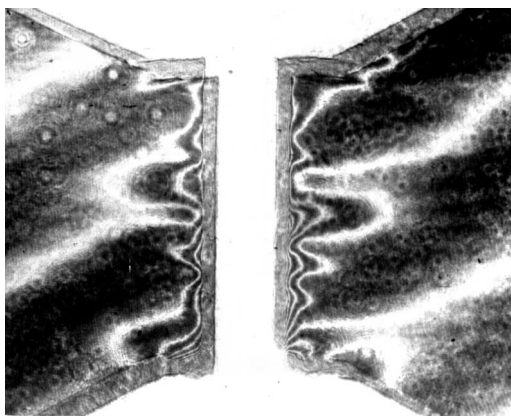
#### 4.7. Rentgenové lasery

Helikální a stabilní formy magnetického pinče mohou hrát významnou roli v koherentním rentgenovém záření. Rentgenové lasery mohou být generovány pouze v prostředí s velmi vysokou hustotou energie ve zcela speciálních parametrech elektronové hustoty a teploty plazmatu. Od 70-90 let se zdálo, že vývoj rentgenových laserů bude možný pouze v prostředí velkých laboratoří výkonných optických laserů. V posledních letech se prokázalo, že také v silných magnetických pinčích mohou vznikat podmínky dostatečné pro rentgenové laserování a navíc ve velmi rychlých kapilárních výbojích je možné vybudovat indukovanou emisi na zařízení, které je dostupné i menším laboratořím.

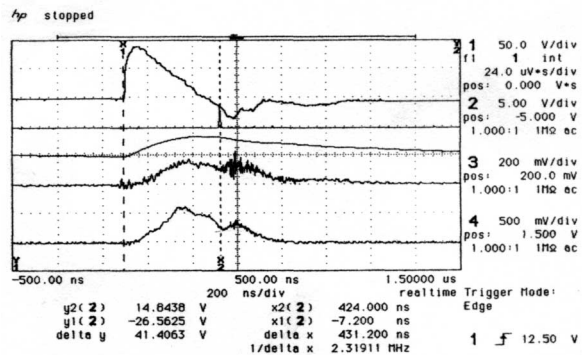
Problém generování indukované emise pro rentgenové záření spočívá v tom, že nelze použít běžnou optiku pro realizaci rezonančního systému, čerpací energie jsou vysoké, odpovídají teplotám miliónů K a jsou obtížně realizovatelné a doba existence inverzních

populací je krátká a trvá pouze několik desítek pikosekund. Schémata čerpání inverzních populací jsou podobná jako u optických laserů – excitační a rekombinační. Velkým problémem rentgenových laserů je silná absorpce rentgenových délek a malá koherentní délka několika mm.

Na katedře fyziky FEL ČVUT se zkoumá neteplné rentgenové záření korony silných uhlíkových vláken. Ukazuje se, že při pulzním výboji je možné generovat 80 % energie záření v oblasti 60-100 eV, což je vhodná oblast pro vznik inverzní populace ve vodíkupodobném Balmerově přechodu mezi 3 a 2 hladinou na vlnové délce 18,22 nm. Z rentgenové a vizualizační diagnostiky plazmatu uhlíkové tuhy vyplývá, že při proudu 40 kA rozvíjejícím se po dobu 360 ns vytváří helikální oblast nestabilit kde dochází k radiálnímu urychlení plazmatu neteplnou rychlostí. Emitované záření je v oblasti 60 – 100 eV a jeho maximum koreluje se spojením dvou sousedních závitů koronální helikální struktury (obr.4.11). Uvedený jev je názorným příkladem pro možné využití samoorganizačních vlastností magnetizovaného plazmatu.



Printed: 22 JAN 1998 at 17:38:32



Obr. 4.11: Helikální tvar korony a emise rentgenového záření uhlíkové tuhy