

TF4: O VZTAHU MATEMATIKY A FYZIKY



STUDIJNÍ TEXT
PETR KULHÁNEK



OBSAH

PŘEDMLUVA, ÚVOD	4
1. KOMPLEXNÍ ČÍSLA	5
REPREZENTACE KOMPLEXNÍHO ČÍSLA	5
GONIOMETRICKÝ TVAR	6
ROTACE V ROVINĚ	9
KVATERNIONY	12
2. KOMPLEXNÍ FUNKCE	15
HOLOMORFNÍ FUNKCE	15
LAURENTŮV ROZVOJ	16
REZIDUOVÁ VĚTA A PÓLY	16
PŘÍKLADY NA VÝPOČTY INTEGRÁLŮ	18
CAUCHYOVA INTEGRÁLNÍ FORMULE A HOLOGRAFICKÝ PRINCIP	21
3. SKALÁRNÍ SOUČIN	24
NORMA VEKTORU	25
SKALÁRNÍ SOUČIN	26
PROSTORY REÁLNÝCH A KOMPLEXNÍCH N-TIC	28
PROSTORY POSLOUPNOSTÍ	29
PROSTOR KOMPLEXNÍCH FUNKCÍ REÁLNÉ PROMĚNNÉ	29
4. VEKTOROVÝ SOUČIN	32
SYMETRICKÉ A ANTISYMETRICKÉ MATICE	32
VEKTOROVÝ SOUČIN	34
VEKTOROVÉ IDENTITY	36
LIEOVA ALGEBRA	39
5. OD GRADIENTU K HELICITĚ	41
GRADIENT	41
DIVERGENCE	45
ROTACE	49
HELICITA	51
6. VÍCEROZMĚRNÉ INTEGRÁLY	54
KŘIVKOVÝ INTEGRÁL	54
PLOŠNÝ A OBJEMOVÝ INTEGRÁL	57
INTEGRACE PER PARTES V N DIMENZÍCH	60
VNĚJŠÍ ALGEBRA	61
MÍRA A METRIKA	62
7. OPERÁTORY V KŘIVOČARÝCH SOUŘADNICÍCH	63
KŘIVOČARÉ SOUŘADNICE A LAMÉOVY KOEFICIENTY	63
GRADIENT	66
DIVERGENCE	67
LAPLACEŮV OPERÁTOR	68
ROTACE	68
8. BESSELOVY FUNKCE, KULOVÉ FUNKCE	70
KMITY A VLNY	70
ROZHRANÍ	73
BESSELOVY FUNKCE	74
KULOVÉ FUNKCE	78

9. ZOBECNĚNÉ FUNKCE	80
DIRACOVA DISTRIBUCE	80
TEMPEROVANÉ DISTRIBUCE	81
GREENOVA FUNKCE	83
PŘÍKLAD: ŘEŠENÍ ROVNICE DIFÚZE NA R^3	85
10. ZÁKONY ZACHOVÁNÍ	88
EXTENZIVNÍ VELIČINY A KONTINUITA	88
ZÁKON ZACHOVÁNÍ HMOTY A NÁBOJE	90
ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE	91
ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI	92
11. PORUCHOVÝ POČET	97
ZÁKLADNÍ PRINCIPY	97
ZVUKOVÉ VLNY V PLYNECH	101
ZVUKOVÉ VLNY V POHYBLIVÉM PROSTŘEDÍ	103
JEANSOVO KRITÉRIUM	103

PŘEDMLUVA, ÚVOD

O vztahu matematiky a fyziky jsem poprvé přednášel v roce 2012. Byla to zvláštní doba. Byl jsem po operaci, měl berle a přednášel jsem v sedě, za pomoci jakéhosi projekčního přístroje, který promítal rukou psané vztahy na plátno. Chtěl jsem tehdy ukázat, že fyzika potřebuje matematiku a matematika fyziku. Jsou to dvě nedílné součásti našeho popisu světa. Uběhlo šest roků a před stejným úkolem stojím znova, jen s jinými studenty a jiným zázemím. Technika pokročila, přednášky je běžné natáčet a hyperlinky na jejich záznamy, včetně aktuální verze tohoto skriptu, naleznete na serveru aldebaran.cz v sekci Studium. Změnila se poněkud i skladba přednášek. Chci se zastavit jen u některých zajímavých problémů, bez hloubky matematických důkazů ukázat užitečnost matematiky při fyzikálním popisu jevů. Cílem není ucelený výklad, ale spíše jakési střípky, různé pohledy na dávno známou věc, ukázky postupů, které byly v historii úspěšné a našly si pevné místo v současné vědě. K ucelenému výkladu jednotlivých partií matematiky slouží zcela jiné kurzy. Proto i toto skriptum chápejte spíše jako mozaiku, ze které při vhodném poskládání může občas vzniknout zajímavý obraz.

V Praze 22. února 2018,
Petr Kulhánek

1. KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Komplexní čísla začali poprvé používat italsí matematicové v 17. století při řešení algebraických rovnic. Zlatou érou komplexních čísel bylo století osmnácté, kdy se stala nedílnou součástí matematických a fyzikálních postupů. K jejich slávě nejvíce přispěli francouzský matematik Abraham de Moivre (1667–1754), švýcarský matematik Johann Bernoulli (1667–1748) a jeho žák Leonhard Euler (1707–1803), který zavedl známý symbol „ i “ pro $\sqrt{-1}$ a začal komplexní čísla interpretovat jako body roviny, a samozřejmě německý matematik Karl Friedrich Gauss (1777–1855), který toto pojetí dovedl k dokonalosti. K zobecnění komplexních čísel na *kvaterniony* (využívající čtyři osy) nejvíce přispěl irský matematik William Rowan Hamilton (1805–1865).

Reprezentace komplexního čísla

Komplexní čísla nejčastěji chápeme jako rozšíření reálné osy o násobky imaginární jednotky i , jejíž základní vlastnost je

$$i^2 = -1, \quad (1)$$

Algebraickým tvarem komplexního čísla proto je

$$f = x + iy. \quad (2)$$

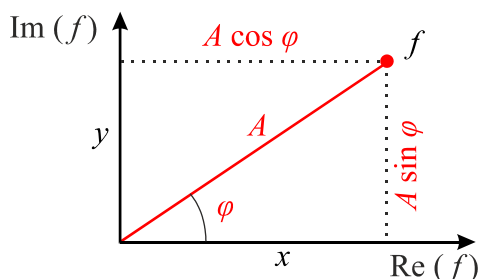
Násobení dvou komplexních čísel v algebraickém tvaru vede na poněkud nepřehledný výraz

$$f_1 f_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \quad (3)$$

Komplexní číslo vždy reprezentuje dvojici reálných čísel, kterou lze interpretovat jako body roviny. Z nich můžeme komplexní číslo kdykoli složit nebo naopak z komplexního čísla obě souřadnice oddělit. Můžeme proto psát

$$f = x + iy = (x, y). \quad (4)$$

Pokud v rovině použijeme polární souřadnice, můžeme komplexní číslo reprezentovat jinou dvojicí – vzdáleností od počátku A (amplitudou) a azimutem φ (fází):



V tuto chvíli už tedy máme tři reprezentace komplexního čísla: algebraickou, kartézskou a polární:

$$f = x + iy = (x, y) = [A, \varphi]. \quad (5)$$

V každém případě komplexní číslo znamená vždy dvojici čísel reálných. Pokud známe polární souřadnice (amplitudu a fázi), snadno určíme kartézské (reálnou a imaginární část):

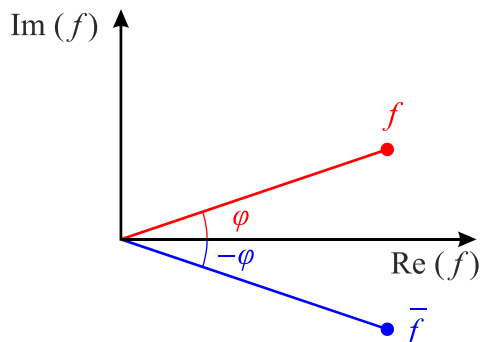
$$\begin{aligned} x &= A \cos \varphi, \\ y &= A \sin \varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Opačná transformace je snadno odvoditelná z Pythagorovy věty a definice tangenty úhlu:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \text{atg}(y/x). \end{aligned} \quad (7)$$

Komplexní sdružení

Zrcadlením nazýváme transformaci, při níž komplexní číslo symetricky zrcadlíme kolem reálné (vodorovné) osy:



Při této transformaci se změni imaginární část čísla $\text{Im } f$ na $-\text{Im } f$. Výsledek zrcadlení nazýváme *komplexně sdružené číslo*:

$$\blacktriangleright \quad \bar{f} = x - iy. \quad (8)$$

Komplexní sdružení je užitečná transformace, můžeme pomocí ní snadno nalézt amplitudu komplexního čísla, neboť platí

$$\blacktriangleright \quad \bar{f} f = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = A^2. \quad (9)$$

Za pomoci komplexního sdružení snadno také vyjádříme reálnou a imaginární část:

$$\blacktriangleright \quad \text{Re } f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), \quad (10)$$

$$\blacktriangleright \quad \text{Im } f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}), \quad (11)$$

Goniometrický tvar

Komplexní číslo lze zapsat za pomoci exponenciální funkce. Pojdme nejprve tuto funkci definovat jako nekonečnou řadu. Hledejme funkci, jejíž derivace je rovna funkci samotné:

$$F'(x) = F(x) \quad (12)$$

Pak i druhá, třetí a libovolná derivace bude rovna původní funkci. Zkrátka tato funkce bude imunní vzhledem k derivování. Hledejme takovou zvláštní funkci jako nekonečnou řadu

$$F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \dots \quad (13)$$

Její derivaci provedeme člen po členu:

$$F'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + 5c_5 x^4 + \dots \quad (14)$$

Pokud mají být obě poslední funkce stejné (funkce je rovna své první derivaci), musí platit:

$$c_1 = c_0, \quad 2c_2 = c_1, \quad 3c_3 = c_2, \quad 4c_4 = c_3, \quad 5c_5 = c_4, \quad \dots \quad (15)$$

Pokud zvolíme konstantu c_0 , můžeme dopočítat všechny koeficienty rozvoje. Volba $c_0 = 0$ povede na nulovou funkci, jakékoli nenulové číslo nám vygeneruje námi hledanou funkci. Hodnota c_0 je nepodstatná a bude jen násobícím faktorem této funkce. Proto zvolíme $c_0 = 1$:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{3 \cdot 2}, \quad c_4 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2}, \quad c_5 = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}. \quad (16)$$

Celkem snadno odhadneme obecnou formalku:

$$c_n = \frac{1}{n!}. \quad (17)$$

Nalezená funkce se nazývá exponenciála a její rozvoj tedy je

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots. \quad (18)$$

V nulovém argumentu má námi nalezená funkce hodnotu 1. V argumentu 1 je výsledkem tzv. Eulerovo číslo:

$$\exp(0) = 1, \quad (19)$$

$$\exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots = 2,71828183\dots = e. \quad (20)$$

Jiný postup nalezení exponenciály

Funkci „imunní“ vůči derivování můžeme také nalézt z diferenciální rovnice

$$F' = F \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{dx} = F \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{F} = dx \quad \Rightarrow \quad (21)$$

$$\ln F = x + C \quad \Rightarrow \quad F(x) = K e^x.$$

Vzhledem k tomu, že má platit $F(0) = 1$, musí být $K = 1$. Vidíme tedy, že námi nalezená řada je exponenciální funkcí se základem rovným Eulerově číslu:

$$\blacktriangleright \quad \exp(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots. \quad (22)$$

V matematice je velmi časté, že funkce jsou definovány za pomoci nekonečných řad a většinou se z obdobných řad počítají i jejich funkční hodnoty (například ve vaší kalkulačce). Pokud z rozvoje exponenciály vybereme jen sudé mocniny, dostaneme hyperbolický kosinus (vzpomeňte si, že v nule má hodnotu 1 a je otočen vzhůru, podobně jako parabola). Pokud vybereme jen sudé mocniny a budeme u nich střídát znaménka, dostaneme obyčejný kosinus. Střídající se znaménka budou polynomy tvořící řadu otáčet střídavě dolů a nahoru, tím získáme periodickou funkci. Pokud vybereme liché mocniny, funkce se nazývá sinus hyperbolický a pokud vybereme liché mocniny a budeme u nich střídát znaménka, získáme normální sinus.

Zapamatujte si:

$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} \exp x &\equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \\ \operatorname{ch} x &\equiv 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots, \\ \cos x &\equiv 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \pm \dots, \\ \operatorname{sh} x &\equiv x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \pm \dots, \\ \sin x &\equiv x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \pm \dots \end{aligned} \quad (23)$$

To, že takto definované funkce splývají s jejich klasickou definicí z trigonometrie, lze dokázat Taylorovým rozvojem funkcí. Mezi funkcemi z tabulky existuje řada zajímavých vztahů, k neznámějším patří Eulerův vztah. Zkusme nalézt exponenciálu s ryze imaginárním argumentem (za pomoci její řady):

$$\begin{aligned}\exp(i\varphi) &= 1 + (i\varphi) + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \dots = \\ &= 1 + ix - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} \pm \dots\right) + i\left(x - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \mp \dots\right).\end{aligned}$$

V první závorce je řada pro kosinus, ve druhé řada pro sinus. Celkově tedy platí:

$$\blacktriangleright \quad e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (24)$$

Eulerův vztah je nesmírně užitečný při vyjadřování komplexních čísel:

$$f = x + iy = A \cos \varphi + i A \sin \varphi = A(\cos \varphi + i \sin \varphi) = A e^{i\varphi}. \quad (25)$$

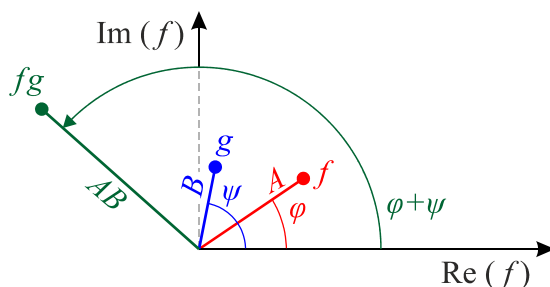
Jde o tzv. goniometrickou interpretaci komplexního čísla. Komplexní číslo už tedy umíme zapsat čtyřmi způsoby:

$$\blacktriangleright \quad f = x + iy = (x, y) = [A, \varphi] = A e^{i\varphi}. \quad (26)$$

V goniometrickém tvaru můžeme snadno interpretovat násobení dvou komplexních čísel:

$$fg = A e^{i\varphi} B e^{i\psi} = AB e^{i(\varphi+\psi)}. \quad (27)$$

Součin dvou komplexních čísel má amplitudu rovnou součinu amplitud a fázi rovnou součtu fází původních čísel:



Velmi zvláštní pozici má číslo ve tvaru

$$g = e^{i\alpha}. \quad (28)$$

Amplituda tohoto čísla je rovná jedné, tedy číslo leží na jednotkové kružnici v Gaussově rovině. Tak se nazývá rovina, v níž na kartézské souřadnice vynášíme reálnou a imaginární část komplexního čísla. Pokud tímto číslem (tzv. komplexní jednotkou) vynásobíme jakékoli jiné komplexní číslo, je výsledkem jeho otočení o úhel α v kladném matematickém směru (proti směru hodinových ručiček):

$$f e^{i\alpha} = A e^{i\varphi} e^{i\alpha} = A e^{i(\varphi+\alpha)}. \quad (29)$$

V goniometrickém tvaru lze komplexní čísla snadno násobit i otáčet kolem počátku souřadnicové soustavy. Také lze velmi elegantně odvozovat různé vztahy, jako příklad uveďme součtové vzorce:

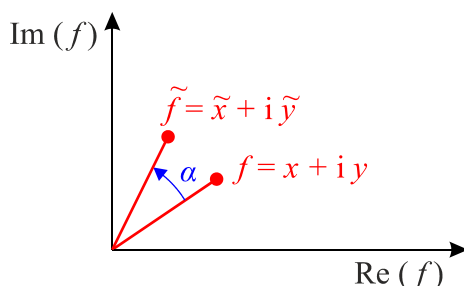
$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \operatorname{Re}(e^{i(\alpha+\beta)}) = \operatorname{Re}(e^{i\alpha} e^{i\beta}) = \\ &= \operatorname{Re}[(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)] = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Analogicky odvodíme různé další vztahy, postačí jen aplikovat Eulerův vztah (24). Přehled užitečných výrazů naleznete v následujícím rámečku:

Zapamatujte si:

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \cos x + i \sin x, \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x, \\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, & \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \\ \cos(-x) &= \cos x, & \sin(-x) &= -\sin x.\end{aligned}\tag{30}$$

Rotace v rovině



Otočení bodu v rovině můžeme za pomoci komplexních čísel zapsat velmi jednoduše

$$\tilde{f} = \tilde{x} + i \tilde{y} = f e^{i\alpha} = (x + iy)(\cos \alpha + i \sin \alpha) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha) + i(x \sin \alpha + y \cos \alpha).$$

Porovnáním začátku a konce je jasné, že souřadnice pootočeného bodu jsou

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ \tilde{y} &= x \sin \alpha + y \cos \alpha.\end{aligned}\tag{31}$$

Pokud se nebude otáčet bod, ale souřadnicová soustava, postačí změnit úhel α na $-\alpha$. Výsledný vztah bude v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\tag{32}$$

Což je typická rotační matice. Povšimněte si, že je její determinant roven jedné – to je pro rotační transformace charakteristické. Nyní tuto transformaci zapíšeme pro velmi malý úhel (nejlépe infinitezimální) Z rozvoje trigonometrických funkcí postačí ponechat jen první nenulový člen:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Infinitezimální rotační matici můžeme nyní rozdělit na jednotkovou matici a zbytek:

$$\mathbb{R}_{\text{inf}} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

První matice je jednotková a se souřadnicemi nedělá nic, druhá matice zamění souřadnice (x, y) a u druhé z nich ještě otočí znaménko. Často bývá zvykem z druhé matice vytknout imaginární jednotku a celou transformaci převést do tvaru

$$\mathbb{R}_{\text{inf}} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\alpha \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Důvody pro tuto úpravu jsou hned dva: 1) koeficienty u matic korespondují s prvními dvěma členy rozvoje exponenciály $\exp[i\alpha] = 1 + i\alpha$, což bude výhodné; 2) nová matice má reálná vlastní čísla a navzájem kolmé vlastní vektory a nazýváme ji *generátor rotace*

►
$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Pro rotační transformaci v rovině tedy platí

►
$$\mathbb{R}_{\text{inf}} = \mathbb{I} + i\alpha\mathbb{M}. \quad (37)$$

Pojďme nyní otočení o konečný úhel sestavit z mnoha malých pootočení. Celkový úhel rozdělíme na n stejných malých úhlů ($n \rightarrow \infty$)

$$\alpha = n \frac{\alpha}{n} \quad (38)$$

a rotační transformaci (37) o úhel α/n zopakujeme $n \times$:

$$\mathbb{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{R}_{\text{inf}}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{I} + i \frac{\alpha}{n} \mathbb{M} \right)^n. \quad (39)$$

Vzhledem k tomu, že $(1+x/n)^n \rightarrow e^x$, platí

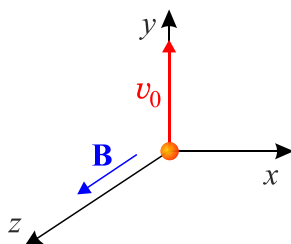
$$\mathbb{R} = e^{i\alpha\mathbb{M}}. \quad (40)$$

Takto elegantně lze vyjádřit rotační transformaci o konečný úhel α za pomoci generátoru rotace. Exponenciální funkce z matice je samozřejmě definována rozvojem(22), tj.

►
$$\mathbb{R} = e^{i\alpha\mathbb{M}} = \mathbb{I} + i\alpha\mathbb{M} + \frac{(i\alpha\mathbb{M})^2}{2!} + \frac{(i\alpha\mathbb{M})^3}{3!} + \dots. \quad (41)$$

Vyjádření rotace přes generátory je výhodné zejména tehdy, pokud budeme potřebovat kombinovat více rotací kolem různých os a s různými úhly. K této úloze se ještě vrátíme. Podobný postup je také užitečný u Lorentzovy transformace. Pomocí generátorů této transformace lze pak zapsat obecnou Lorentzovu transformaci. I k této úloze se později vrátíme.

► **Příklad:** Pohyb nabitě částice v magnetickém poli



Předpokládejme, že jsme zvolili souřadnicový systém tak, aby homogenní magnetické pole mířilo v ose z a nabitou částici jsme vypustili rychlostí v_0 napříč siločarám. Magnetické pole, počáteční podmínky a Lorentzova pohybová rovnice budou:

$$\mathbf{B} = (0, 0, B), \quad (42)$$

$$\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0), \quad (43)$$

$$\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0), \quad (44)$$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = Q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}. \quad (45)$$

Pohybovou rovnici rozepíšeme do složek. Pohyb se bude konat v rovině (x, y) , proto se omezíme jen na tyto dvě složky:

$$\ddot{x} = \frac{QB}{m} \dot{y}, \quad (46)$$

$$\ddot{y} = -\frac{QB}{m} \dot{x}. \quad (47)$$

Obě rovnice je možné řešit různými způsoby. Asi nejrychleji k cíli vede Landauův postup: druhou rovnici vynásobíme komplexní jednotkou a sečteme s první. Kombinaci QB/m označíme jako cyklotronní frekvenci ω_c :

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -i\omega_c(\dot{x} + i\dot{y}) \quad (48)$$

Sečtením rovnic jsme žádnou informaci neztratili. Kdykoli můžeme oddělit reálnou a imaginární část a vrátit se k původním rovnicím. Nyní stačí zavést komplexní proměnnou $f = x + iy$ a řešit jednoduchou rovnici

$$\ddot{f} = -i\omega_c \dot{f} \quad (49)$$

v komplexním oboru. Po první integraci máme:

$$\dot{f} + i\omega_c f = C_1. \quad (50)$$

Nyní najdeme homogenní a partikulární řešení:

$$f(t) = C_2 e^{-i\omega_c t} - \frac{i}{\omega_c} C_1. \quad (51)$$

Integrační konstanty určíme z počátečních podmínek, tj. z relací

$$\begin{aligned} f(0) = x(0) + iy(0) &= 0, \\ \dot{f}(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) &= iv_0. \end{aligned} \quad (52)$$

Pouhým dosazením do nalezeného řešení zjistíme, že:

$$C_1 = iv_0, \quad C_2 = -v_0/\omega_c. \quad (53)$$

Celkové řešení má tedy tvar

$$f(t) \equiv x(t) + iy(t) = -\frac{v_0}{\omega_c} e^{-i\omega_c t} + \frac{v_0}{\omega_c}. \quad (54)$$

K řešení jsme využili komplexní čísla. Nyní je načase oddělit reálnou a imaginární část, a získat tak souřadnice pohybující se nabitě částice:

$$\begin{aligned} x(t) &= R_L - R_L \cos \omega_c t, \\ y(t) &= R_L \sin \omega_c t, \end{aligned} \quad (55)$$

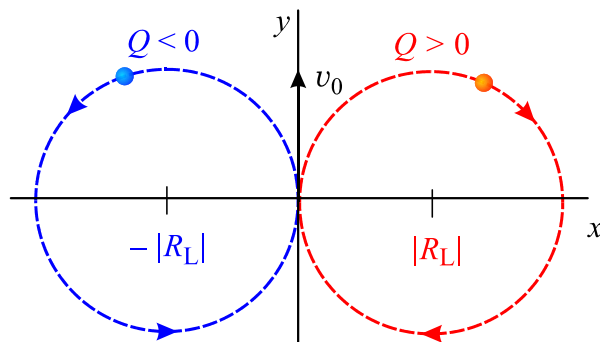
kde jsme označili

$$R_L \equiv \frac{mv_0}{QB}; \quad \omega_c \equiv \frac{QB}{m} \quad (56)$$

tzv. Larmorův poloměr R_L a cyklotronní frekvenci ω_c . Trajektorii získáme vyloučením času (na pravo ponecháme sinus a kosinus, obě rovnice umocníme na druhou a sečteme):

$$(x - R_L)^2 + y^2 = R_L^2. \quad (57)$$

Vidíme, že pohyb se děje po kružnici s poloměrem R_L a se středem $S = [R_L, 0]$. Poloha středu závisí na znaménku náboje částice, stejně tak jako cyklotronní frekvence oběhu.



Kvaterniony

Vše, co o komplexních číslech víme, lze soustředit do jednoduché definiční tabulky, v níž jsou všechny možné kombinace násobení reálné části (reprezentované jednotkou 1) a imaginární části (reprezentované imaginární jednotkou i):

▶	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 5px;">1</td> <td style="padding: 5px 5px;">i</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 5px;">1</td> <td style="padding: 5px 5px;">i</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 5px;">i</td> <td style="padding: 5px 5px;">-1</td> </tr> </table>	1	i	1	i	i	-1	(58)
1	i							
1	i							
i	-1							

Už víme, že komplexní čísla reprezentují uspořádanou dvojici reálných čísel, kterou lze ztotožnit s kartézskými souřadnicemi bodu v rovině. V polovině 19. století bylo jasné, že by se hodilo nějaké rozšíření komplexních čísel na čtyři osy, neboť většina dějů v přírodě je popisována čtveřicemi (čas a prostor, energie a hybnost, skalární a vektorový potenciál atd.). Postupně krystalizovala představa takového rozšíření. Mělo by jít o „svět“ s jednou reálnou osou (odpovídající času) a třemi imaginárními osami (odpovídajícími prostoru). Takové „komplexní“ číslo (*kvaternion*) by mělo tvar

$$f = s + ix + jy + kz, \quad (59)$$

kde s je reálná neboli skalární část, (x, y, z) je imaginární neboli vektorová část a i, j, k jsou tři imaginární jednotky, které splňují relaci

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1. \quad (60)$$

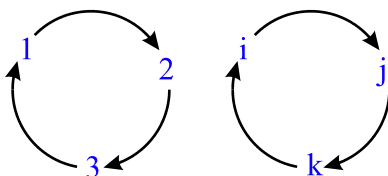
Obdobně jako u komplexních čísel by mělo být možné ze čtveřice reálných čísel kdykoli kvaternion sestavit a naopak z kvaternionu kdykoli opětovně oddělit všechny čtyři části a sestavit uspořádanou čtveřici neboli čtyřvektor, tj. přecházet mezi oběma reprezentacemi

▶	$f = \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s + ix + jy + kz. \quad (61)$	(61)
---	---	------

Za tím účelem bylo ale třeba vhodně definovat násobení mezi jednotlivými imaginárními jednotkami. Tomuto úkolu se usilovně věnoval irský matematik Willard Rowan Hamilton (1805–1865), kterého budou čtenáři znát z Hamiltonova principu, Hamiltonových rovnic a Hamiltonova operátoru. Hamilton je považován za otce kvaternionů, ale k jejich teorii přispěli i další matematici, například německý matematik Adolf Hurwitz (1859–1919), který dokázal, že smysluplné rozšíření komplexních čísel na tzv. *hyperkomplexní čísla* lze udělat jen ve čtyřech (kvaterniony) a osmi (oktoniony) dimenzích, dále britští matematici Arthur Cayley (1821–1895) a Augustus de Morgan (1806–1871), bratři Gravesovi a další. Hamilton zavedl nekomutativní násobení imaginárních jednotek, které kopíruje vektorové součiny jednotkových vektorů ve směru imaginárních os:

$$\begin{aligned} ij &= k, & ji &= -k, \\ jk &= i, & kj &= -i, \\ ki &= j, & ik &= -j. \end{aligned} \quad (62)$$

Vztahy lze jeden z druhého získat cyklickou záměnou:



Základní tabulka operací mezi reálnou a imaginárními jednotkami tedy je

	1	i	j	k	
1	1	i	j	k	
i	i	-1	k	-j	
j	j	-k	-1	i	
k	k	j	-i	-1	(63)

Vypráví se, že Hamiltona tyto operace napadly dne 16. října 1843, když spěchal na zasedání Akademie věd a přecházel Broughamský most v Dublinu. Prý kapesním nožikem do mostu vyryl nápis $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Na mostě je dnes pamětní cedulka s tímto vztahem. Jak vidíme, vandalských činů se mohou dopouštět nejen bezejmenní chuligáni, ale i ctihodní matematikové se šlechtnými pohnutkami. Pronásobíme-li dle těchto pravidel dva kvaterniony

$$f = \begin{pmatrix} \phi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; \quad g = \begin{pmatrix} \psi \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (64)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} fg &= (\phi + iA_x + jA_y + kA_z)(\psi + iB_x + jB_y + kB_z) = \dots \\ &= (\phi\psi - A_xB_x - A_yB_y - A_zB_z) + \\ &+ i(\phi B_x + \psi A_x + A_yB_z - A_zB_y) + \\ &+ j(\phi B_y + \psi A_y + A_zB_x - A_xB_z) + \\ &+ k(\phi B_z + \psi A_z + A_xB_y - A_yB_x). \end{aligned} \quad (65)$$

Výsledek můžeme zapsat v kompaktnějším tvaru

$$fg = \begin{pmatrix} \phi\psi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ \phi\mathbf{B} + \psi\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (66)$$

Pro ryze reálné kvaterniony (chybí u nich imaginární, tj. vektorová část) platí

$$fg = \phi\psi \quad (67)$$

a násobení kvaternionů se redukuje na násobení dvou reálných čísel. Pro ryze imaginární kvaterniony (mají nulovou skalární část) pak máme

$$fg = \begin{pmatrix} -\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (68)$$

tedy ve skalární části se objeví záporně vzatý skalární součin a ve vektorové části vektorový součin. Představte si, že vektor \mathbf{A} je naznačenou operací gradientu, tj. $\mathbf{A} = \nabla$, potom se ve vztahu (68) objeví ve skalární části přirozeným způsobem divergence a ve vektorové rotace pole \mathbf{B} . Vlastnosti kvaternionů dobře korespondují se skalárními a vektorovými součiny při popisu elektromagnetického pole, proto je James Clerk Maxwell v roce 1873 použil při závěrečné formulaci svých rovnic. Vektory chápal jako ryze imaginární kvaterniony (jen s vektorovou částí) a skaláry jako ryze reálné kvaterniony (jen se skalární částí). Například vektor \mathbf{A} a gradient můžeme chápat jako ryze imaginární kvaterniony

$$\mathcal{A} = iA_x + jA_y + kA_z = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; \quad \nabla = i\partial_x + j\partial_y + k\partial_z = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial/\partial\mathbf{x} \end{pmatrix} \quad (69)$$

Podobně jako u komplexního čísla zavádíme reálnou a imaginární část, můžeme u kvaternionu zavést skalární a vektorovou část:

► $f = \begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; \quad \text{S. } f = \phi; \quad \text{V. } f = \mathbf{A}. \quad (70)$

Nyní můžeme divergenci a rotaci pole zapsat jako příslušné části součinu dvou kvaternionů:

$$\text{div } \mathbf{A} = -\text{S. } \nabla \mathcal{A}; \quad \text{rot } \mathbf{A} = \text{V. } \nabla \mathcal{A} \quad (71)$$

V závěrečné tabulce je nalevo historický kvaternionový zápis některých Maxwellových rovnic z roku 1873 (str. 257 a dále, díl II) a napravo dnešní notace:

$\mathcal{B} = \text{V. } \nabla \mathcal{A}$	$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$
$\mathcal{E} = -\dot{\mathcal{A}} - \nabla \psi$	$\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla \phi$
$e = \text{S. } \nabla \mathcal{D}$	$\text{div } \mathbf{D} = \rho_Q$
$\mathcal{F} = \text{V. } \mathcal{G}\mathcal{B} - \dot{\mathcal{A}} - \nabla \psi$	$\mathbf{F} = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B} + Q\mathbf{E}$
$\mathcal{C} = \mathcal{K} + \dot{\mathcal{D}}$	$\mathbf{j}_{\text{tot}} = \mathbf{j} + \partial\mathbf{D}/\partial t$
$4\pi\mathcal{C} = \text{V. } \nabla \mathcal{H}$	$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial\mathbf{D}/\partial t$



2. KOMPLEXNÍ FUNKCE

Předpokládejme, že funkce $f(z)$ je funkcí komplexní proměnné, tj. $f(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. V následujícím textu uvedeme základní pojmy a postupy z komplexní analýzy.

Holomorfní funkce

Řekneme, že komplexní funkce $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ je holomorfní na otevřené množině, pokud má derivaci v každém bodě množiny. Otevřená množina je v definici podstatná, protože ke každému bodu množiny musí existovat okolí, na kterém je možné derivaci zavést. Existence komplexní derivace je velmi silný požadavek, a pokud je funkce holomorfní, má zajímavé vlastnosti:

1. platí tzv. Cauchyovy-Riemannovy (CR) podmínky:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (72)$$

Platnost CR podmínek je zřejmá z toho, že derivace musí dát stejný výsledek, ať se k danému bodu blížíme po reálné nebo po imaginární ose, tedy musí platit $\partial f/\partial x = \partial f/\partial iy$. Oddělením reálné a imaginární části získáme CR podmínky.

2. Z CR podmínek je okamžitě vidět, že reálná i imaginární část holomorfní funkce je harmonická, tj. splňuje Laplaceovu rovnici:

$$\blacktriangleright \quad \nabla^2 u = 0; \quad \nabla^2 v = 0. \quad (73)$$

Situaci lze i obrátit. Pokud vezmeme za reálnou část komplexní funkce nějakou harmonickou funkci, můžeme z CR podmínek dopočítat její imaginární část, tedy každou harmonickou funkci je určena nějaká komplexní funkce.

3. K holomorfní funkci lze v každém bodě množiny vždy nalézt Taylorův rozvoj. Později této kapitole si ukážeme, jak lze elegantně nalézt jeho koeficienty, viz vztah (111).
4. Necht' γ je uzavřená prostá (oběhne právě jednou) křivka. Je-li f holomorfní na křivce i uvnitř křivky, platí *Cauchyova fundamentální věta*:

$$\blacktriangleright \quad \oint_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (74)$$

Vzhledem k tomu, že výsledek integrálu se nezmění při jakékoli spojitě deformaci křivky (toto tvrzení zde nebudeme dokazovat), ukážeme si platnost Cauchyovy věty pro kružnici v komplexní rovině parametrizovanou vztahem

$$z = z_0 + R e^{i\varphi}; \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (75)$$

Pro výpočet využijeme Taylorova rozvoje funkce:

$$\begin{aligned} \oint_{z=z_0+Re^{i\varphi}} f(z) dz &= \oint_{z=z_0+Re^{i\varphi}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} c_k R^k e^{ik\varphi} R i e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} i c_k R^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = 0, \end{aligned}$$

neboť pro jakékoli k jde o periodickou funkci, z níž je integrál nulový (plochy nad osou a pod osou jsou stejné).

Laurentův rozvoj

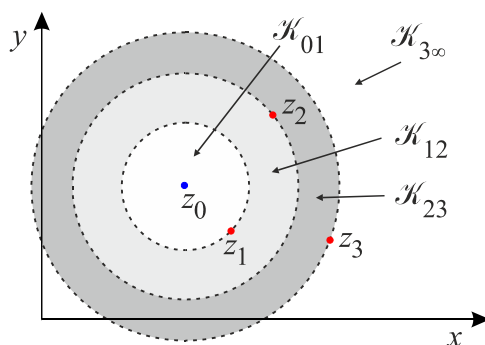
Laurentovým rozvojem komplexní funkce $f(z)$ v okolí bodu z_0 nazýváme řadu

$$\blacktriangleright \quad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k . \quad (76)$$

Touto řadou se zabýval francouzský matematik Pierre Alphonse Laurent (1813–1854). Součet záporných členů řady ($k < 0$) nazýváme *hlavní část* Laurentovy řady, součet nezáporných členů ($k \geq 0$) nazýváme *regulární část* Laurentovy řady.

Pokud má funkce v komplexní rovině póly (osamocené body, ve kterých hodnota funkce diverguje, ale v jejichž prstencovém okolí je funkce holomorfní, viz dále), lze vždy nalézt k danému bodu z_0 nějaká mezikruží \mathcal{K} , na kterých bude funkce holomorfní. Pro tato mezikruží je možné jednoznačně určit koeficienty c_k řady tak, aby Laurentova řada byla na těchto mezikruzích konvergentní. Pro různá mezikruží bude mít řada různé koeficienty.

Na následujícím obrázku jsou póly v bodech z_1, z_2 a z_3 a existují 4 mezikruží, ve kterých lze nalézt koeficienty c_k tak, aby Laurentova řada konvergovala k původní funkci:



Reziduová věta a póly

Hledejme křivkový integrál z komplexní funkce po prosté, kladně orientované uzavřené křivce γ (oblast oběhne právě jednou). Funkce musí být holomorfní v každém bodě křivky, ale v oblasti ohraničené křivkou mohou být póly, a proto nebude integrál po křivce nulový, neboť neplatí předpoklad Cauchyovy fundamentální věty o holomorfnosti funkce v celé oblasti.

Uvažujme nejprve jednoduchou situaci s jediným pólem v z_0 , kolem něhož existuje prstencové okolí (bod z_0 do něho nepatří), na kterém je f holomorfní. Najdeme integrál po kružnici vedené kolem bodu z_0 :

$$\begin{aligned} \oint_{z=z_0+Re^{i\varphi}} f(z) dz &= \oint_{z=z_0+Re^{i\varphi}} \sum_k c_k (z - z_0)^k dz = \sum_k \int_0^{2\pi} c_k R^k e^{ik\varphi} R i e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \sum_k i c_k R^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = \sum_k i c_k R^{k+1} 2\pi \delta_{k,-1} = 2\pi i c_{-1} . \end{aligned}$$

Je zřejmé, že jediným nenulovým členem je člen s $k = -1$. Koeficientu c_{-1} proto říkáme *reziduum* (zbytek) funkce f v bodě z_0 , značíme $\text{Rez}(f; z_0)$. Pro obecnou křivku můžeme postupovat obdobně, výsledkem je *reziduová věta*

$$\blacktriangleright \quad \oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \text{Int } \gamma} \text{Rez}(f, z_k) . \quad (77)$$

Integrál z prosté, kladně orientované uzavřené křivky je roven $2\pi i$ -násobku součtu všech reziduí funkce ležících uvnitř křivky ($\text{Int } \gamma$). Věta umožňuje efektivní výpočty mnoha křivko-

vých integrálů v komplexní rovině, ale i integrálů po reálné ose, kterou chápeme jako část křivky v komplexní rovině. Pokud by křivka byla orientovaná opačně (ve směru hodinových ručiček) objeví se na pravé straně minus.

Póly

Řekneme, že funkce $f(z)$ má pól v bodě z_0 , pokud

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$,
2. v prstencovém okolí z_0 je funkce holomorfní.

Násobnost pólu

Řekneme, že pól z_0 funkce $f(z)$ má násobnost k , pokud koeficienty Laurentova rozvoje na prstencovém okolí bodu z_0 splňují

1. $c_{-k} \neq 0$,
2. $c_l = 0$; $l < -k$.

K výpočtu reziduí pro póly nízké násobnosti lze využít jednoduché vztahy uvedené v následujícím textu.

Reziduum v pólu první násobnosti

Reziduum v pólu první násobnosti lze určit ze vztahu (plyne okamžitě z Laurentova rozvoje)

$$\operatorname{Rez}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)]. \quad (78)$$

Ze vztahu je zřejmé, že pro holomorfní funkci g platí

$$\operatorname{Rez}\left(\frac{g(z)}{(z - z_0)}, z_0\right) = g(z_0). \quad (79)$$

Například

$$\operatorname{Rez}\left(\frac{\sin(z)}{(z+i)(z-i)}, i\right) = \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i) \frac{\sin(z)}{(z+i)(z-i)} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{\sin(z)}{(z+i)} \right] = \frac{\sin(i)}{2i}.$$

Reziduum v pólu k -té násobnosti

$$\operatorname{Rez}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}. \quad (80)$$

Reziduum v nekonečnu

Pro holomorfní funkci můžeme v prstencovém okolí nekonečna zavést Laurentův rozvoj

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_k}{z^k}. \quad (81)$$

Reziduum v nekonečnu potom definujeme vztahem

$$\operatorname{Rez}(f, \infty) = -b_1. \quad (82)$$

Znaménko se definuje záporné proto, aby pro funkci, která je holomorfní až na konečný počet pólů z_k , platilo, že součet všech reziduí je nulový:

$$\operatorname{Rez}(f, \infty) + \sum_{z_k} \operatorname{Rez}(f, z_k) = 0. \quad (83)$$

Tento vztah umožňuje vypočítat reziduum v nekonečnu bez použití definičního vztahu (80).

Příklady na výpočty integrálů

● Příklad 1:

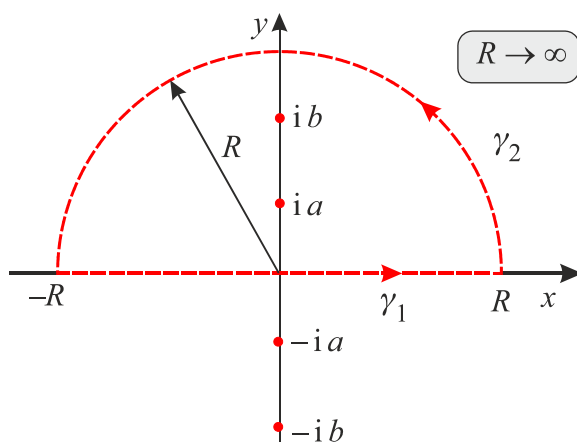
Spočtěte integrál

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx. \quad (84)$$

Namísto reálného integrálu (84) budeme počítat integrál z komplexní funkce (x nahradíme z)

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} = \frac{z^2}{(z + ia)(z - ia)(z + ib)(z - ib)}, \quad (85)$$

která má 4 póly, žádný z nich ale neleží na vodorovné (reálné) ose. Integrál povedeme po křivce na následujícím obrázku, póly jsou vyznačeny červenými kroužky:



Pro výpočet využijeme reziduovou větu, uvnitř červené integrační křivky jsou jen dva póly:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f(z), ia) + \text{Res}(f(z), ib)]. \quad (86)$$

Pro $R \rightarrow \infty$ konverguje integrál přes křivku γ_1 k námi hledanému integrálu I , zatímco integrál přes křivku γ_2 se limitně blíží nule, neboť integrovaná funkce jde v nekonečno na křivce γ_2 (v kterémkoli směru) k nule. Proto máme

$$I = 2\pi i [\text{Res}(f(z), ia) + \text{Res}(f(z), ib)] = \frac{\pi}{a+b}.$$

● Příklad 2:

Spočtěte integrál

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx; \quad m > 0. \quad (87)$$

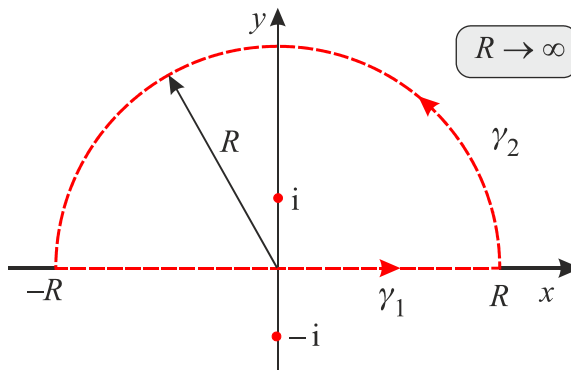
Integrál určitě existuje, neboť čitatel je omezená funkce a jmenovatel se v $\pm\infty$ chová jako $1/x^2$. Integrál určíme jako reálnou část integrálu, v němž funkci kosinus nahradíme kmitavou exponenciálou

$$I = \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{1+x^2} dx; \quad m > 0. \quad (88)$$

Další postup bude obdobný jako v minulém příkladě. Budeme počítat integrál z komplexní funkce

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{1+z^2} = \frac{e^{imz}}{(z+i)(z-i)}, \quad (89)$$

která má póly v bodech $+i$ a $-i$. Jako integrační křivkou zvolíme červenou čárkovanou křivkou z následujícího obrázku



Z reziduové věty máme

$$\int_{\gamma} \frac{e^{imz}}{1+z^2} dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^{imz}}{1+z^2} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{imz}}{1+z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i). \quad (90)$$

V limitě $R \rightarrow \infty$ bude probíhat integrace v prvním integrálu po celé reálné ose, v druhém z integrálů bude pro $m > 0$ integrovaná funkce konvergovat k nule. Pokud by $m < 0$, museli bychom integraci uzavřít přes dolní polorovinu. Výsledek tedy je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{1+x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i) = 2\pi i \frac{e^{-m}}{2i} = \pi e^{-m}. \quad (91)$$

Po oddělení reálné a imaginární části dostaneme výsledek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = \pi e^{-m}; \quad (92)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{1+x^2} dx = 0. \quad (93)$$

● Příklad 3:

Určete integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx. \quad (94)$$

S výpočtem tohoto integrálu budou problémy v okolí nuly, kde integrovaná funkce z obou stran diverguje (viz obrázek) a integraci přes takový bod nelze provést. Přesto lze integraci v určitém smyslu udělat. Integraci rozdělíme na dvě části, v nichž „nepohodlný“ bod vynecháme a limitně se k němu budeme blížit zleva a zprava. Takovýto postup nazýváme integrací ve smyslu *hlavní Cauchyovy hodnoty* a označujeme

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \right]. \quad (95)$$

Označení V. P. je zkratka z *Value Principal*. V našem případě je první z integrálů záporný a druhý kladný a oba se vždy přesně vyruší, takže výsledkem je nulová hodnota. V jiných případech nesymetrických funkcí může být výsledek nenulový. Výsledek tedy je

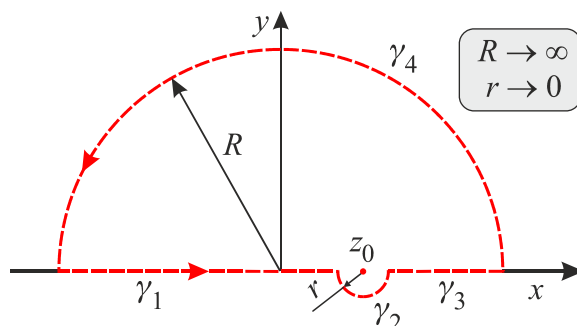
$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = 0. \tag{96}$$

► **Příklad 4:**

Ve fyzice je dosti častý je výpočet integrálu s jednoduchým pólem na reálné ose

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0} dx. \tag{97}$$

Na takový integrál vedou různé úlohy na rezonanci. Je-li funkce $g(z)$ holomorfní v komplexní rovině a v reálném (∞) i imaginárním ($i\infty$) nekonečnu se blíží k nule tak rychle, aby integrál konvergoval, využijeme k výpočtu reziduovou větu pro čárkovanou křivku na obrázku:



Integrál (97) přepíšeme do komplexní proměnné a provedeme integraci po jednotlivých křivkách v matematicky kladném směru, tj. proti směru hodinových ručiček:

$$\int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z-z_0} dz + \int_{\gamma_2} \frac{g(z)}{z-z_0} dz + \int_{\gamma_3} \frac{g(z)}{z-z_0} dz + \int_{\gamma_4} \frac{g(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i g(x_0).$$

V integrálech provedeme limity $R \rightarrow \infty$ a $r \rightarrow 0$. Poslední integrál půjde vzhledem k předpokladům pro $R \rightarrow \infty$ k nule. Jednotlivé integrály postupně dají

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \left(\int_{-R}^{x_0-r} \frac{g(x)}{x-x_0} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{g(z_0 + r e^{i\varphi})}{r e^{i\varphi}} i r e^{i\varphi} d\varphi + \int_{x_0+r}^R \frac{g(x)}{x-x_0} dx \right) + 0 = 2\pi i g(x_0)$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \left(\int_{-R}^{x_0-r} \frac{g(x)}{x-x_0} dx + \int_{x_0+r}^R \frac{g(x)}{x-x_0} dx \right) + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{g(z_0 + r e^{i\varphi})}{r e^{i\varphi}} i r e^{i\varphi} d\varphi = 2\pi i g(x_0)$$

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0} dx + i \int_{\pi}^{2\pi} g(x_0) d\varphi = 2\pi i g(x_0).$$

►
$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0} dx = \pi i g(x_0). \tag{98}$$

Pokud integrál v imaginárním nekonečnu nekonverguje, využijeme jiné integrační cesty, například obdélníky či jiné vhodné útvary.

● Příklad 5:

Určete integrály

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (99)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx. \quad (100)$$

První z integrálů bude klíčový pro teorii distribucí a v dalším se s ním ještě setkáme. Integrand se v počátku chová „normálně“, neboť

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (101)$$

To bohužel nelze říci o druhém integrandu, zde platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\cos x}{x} = \pm \infty \quad (102)$$

a integrál bude možné počítat jen ve smyslu Cauchyovy hlavní hodnoty. Oba integrály budeme počítat naráz za pomoci exponenciální notace, tj. určíme integrál

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \quad (103)$$

a posléze oddělíme reálnou a imaginární část. Při výpočtu budeme postupovat dle obecného návodu z předchozího příkladu. Integrand nahradíme komplexní funkcí

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}, \quad (104)$$

která má jediný pól na reálné ose v bodě $z = 0$. V horní polorovině konverguje integrand v nekonečnu k nule, proto můžeme přímo použít vztah (98) z minulého příkladu:

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i e^0 = i\pi. \quad (105)$$

Oddělíme-li nyní reálnou a imaginární část, máme

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0. \quad (106)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi. \quad (107)$$

U druhého integrálu jsme vynechali symbol V.P., neboť je integrand v $x = 0$ konečný a hlavní hodnota splývá s běžným významem integrace. Odvozený vztah budeme ještě potřebovat. ▸

Cauchyova integrální formule a holografický princip

Hodnoty holomorfní funkce uvnitř libovolné uzavřené prosté křivky lze dopočítat z hodnot na této křivce (funkce musí být holomorfní v celé oblasti) podle *Cauchyovy integrální formule*:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (108)$$

Samotný integrand není holomorfní v bodě $z = z_0$. Důkaz tohoto tvrzení můžeme okamžitě dostat z reziduové věty. Nalezneme ale výsledek integrací po kružnici: Křivku nahradíme bez újmy na obecnosti kružnicí se středem v bodě z_0 (spojitá deformace křivky na holomorfní oblasti nezmění hodnotu křivkového integrálu, nesmíme tedy křivku jen deformovat přes centrální bod z_0 , kde integrand není holomorfní).

Střed kružnice je v bodě, kde počítáme hodnotu funkce, na poloměru kružnice nezáleží (kružnice s různým poloměrem lze spojitě deformovat jednu na druhou). Holomorfní funkci rozvineme do Laurentovy řady v okolí bodu z_0 , která bude mít díky holomorfnosti jen nezáporné členy:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (109)$$

Integrujme nyní na pravé straně vztahu (108) libovolný z členů řady:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{c_k (z - z_0)^k}{z - z_0} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} c_k (z - z_0)^{k-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} c_k R^{k-1} e^{i(k-1)\varphi} i R e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{i c_k R^k}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{ik\varphi} d\varphi = \frac{i c_k R^k}{2\pi i} 2\pi \delta_{k0} = c_0 \delta_{k0} = f(z_0) \delta_{k0}. \end{aligned} \quad (110)$$

Jediný nenulový příspěvek má tedy nulý člen rozvoje a ten je přímo roven hledané hodnotě.

Vztah (109) lze snadno zobecnit na koeficienty Laurentovy řady“

Pro $z_0 \neq \infty$ lze koeficienty řady určit ze vztahu

$$\blacktriangleright \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz; \quad \gamma \subset \mathcal{K}. \quad (111)$$

Křivka γ je uzavřená prostá a celá leží v daném mezikruží. Může jít například o kružnici se středem v z_0 a vhodným poloměrem. Důkaz vztahu (111) je zcela analogický důkazu (110), tj. jen dosadíme parametrizaci kružnice (75) a za funkci hledaný rozvoj. Nenulový bude jediný člen, a ten dá právě koeficient c_k . Pro regulární část řady přejdou koeficienty c_k v běžné koeficienty Taylorovy řady

$$\blacktriangleright \quad c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (112)$$

K rozvoji funkce do Laurentovy řady existuje řada triků, při kterých není nutné provádět výpočet koeficientů podle vztahu (111).

U holomorfních funkcí je velmi zajímavou vlastností vztah (108), pomocí něhož je možné do počítat hodnoty holomorfní funkce ze znalosti funkce na hranici množiny. S obdobným principem se setkáváme i ve fyzice, kde ho nazýváme *holografický princip*. V podstatě jde o tvrzení, že N rozměrnou realitu lze zakódovat do informací na množině s dimenzí $N-1$. Zatím se s holografickým principem setkáváme ve třech oblastech fyziky. První z nich je holografie, tj. pořízení 3D fotografie (hologramu) na 2D médiu. Na hologramu se za pomoci interference zaznamenává informace nejen o intenzitě světla odraženého od objektu, jak je tomu u běžné fotografie, ale i o jeho fázi, která se zapíše jako obrazec vzniklý interferencí odraženého paprsku s referenčním paprskem. Z hologramu lze pak za pomoci laserových pa-

prsků zrekonstruovat třírozměrnou „fotografii“ původního objektu. Holografii objevil anglický fyzik maďarského původu Denis Gabor (1900–1979) v roce 1947.

Druhou oblastí je termodynamika černých děr. Z prací izraelsko-amerického fyzika Jakoba Bekensteina (1947–2015) a britského teoretika Stephena Hawkinga (*1942) vyplývá, že na horizontu černé díry jsou zakódovány informace o jejím nitru. Povrchu černé díry lze přiřadit nejen teplotu, ale i entropii, která je za normálních okolností veličinou vázanou na objem.

Do třetice využil holografický princip holandský teoretik Erik Verlinde (*1962) ve své alternativní teorii gravitace, v níž gravitaci nepovažuje za samostatnou interakci, ale za makroskopický výsledek kvantového chování mikrosvěta (tzv. entropickou sílu patřící do stejné kategorie jako difúze či elasticita). Verlindeho teorie využívá blíže nespecifikovanou projekční plochu, na které je zakódována veškerá informace o objektech uzavřených uvnitř plochy. Takovou plochou by mohla být například světočára struny korespondující s nějakou elementární částicí. Z uvedeného je patrné, že holografický princip – tedy tvrzení, že informace o N dimenzích může být zakódována na $N-1$ rozměrné množině – má pravděpodobně v přírodě hlubší smysl, jehož význam zatím ne zcela chápeme.



3. SKALÁRNÍ SOUČIN

Vektor si můžeme představit jako orientovanou tyčku (rozlišujeme počátek a konec). Rovnoběžně posunuté tyčky považujeme za stále stejný vektor. Pokud vektor posuneme do počátku, můžeme z polohy koncového bodu „odečíst“ tzv. souřadnice neboli složky vektoru. Souřadnice vektoru vždy závisí na volbě souřadnicové soustavy. Nestačí tedy zadat vektor jako uspořádanou trojici, ale musíme jeho definici doplnit o transformační pravidla, tj., jak se změní složky vektoru při přechodu k jiné souřadnicové soustavě:

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3), \quad (113)$$

$$\tilde{f}_k = \sum_{l=1}^3 A_{kl} f_l, \quad (114)$$

kde \mathbf{A} je transformační matice od nevlknované soustavy k vlnkované. Strukturované objekty, jako jsou vektory či matice, většinou značíme tučným řezem písma. Na tabuli, kde je to těžko proveditelné, značíme vektory šipkou nad symbolem. Někdy je výhodné psát složky vektoru do řádku (většinou pro úsporu místa), jindy jako sloupcové vektory. Pokud transformujeme složky obdobně jako ve vztahu (114), je nutný sloupcový zápis:

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}. \quad (115)$$

S vektory umíme provádět dvě operace – *natahování* reálným koeficientem a *skládání*:

$$\blacktriangleright \quad \alpha \mathbf{f} \equiv (\alpha f_1, \alpha f_2, \alpha f_3), \quad (116)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{f} + \mathbf{g} \equiv (f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3). \quad (117)$$

Jak natahování, tak skládání provádíme se všemi složkami. Výsledkem natahování je vektor stejného ($\alpha > 0$) nebo opačného ($\alpha < 0$) směru, který je α krát delší. Výsledkem skládání dvou vektorů je vektor, který vznikne jako úhlopříčka rovnoběžníku nataženého na oba vektory (operaci, kterou známe ze základních kurzů jako tzv. rovnoběžník sil). Pro tyto dvě operace platí jednoduchá pravidla ($\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ jsou vektory, α, β reálná čísla):

$$\blacktriangleright \quad \begin{array}{ll} 1) \quad \mathbf{f} + \mathbf{g} = \mathbf{g} + \mathbf{f}, & \mathbf{f} + (\mathbf{g} + \mathbf{h}) = (\mathbf{f} + \mathbf{g}) + \mathbf{h}, \\ 2) \quad \alpha(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \alpha\mathbf{f} + \alpha\mathbf{g}, & (\alpha + \beta)\mathbf{f} = \alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{f}, \\ 3) \quad \alpha(\beta\mathbf{f}) = (\alpha\beta)\mathbf{f}, & 1\mathbf{f} = \mathbf{f}, \\ 4) \quad \mathbf{f} + \mathbf{g} = \mathbf{f} + \mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{h}. & \end{array} \quad (118)$$

Lineární vektorový prostor

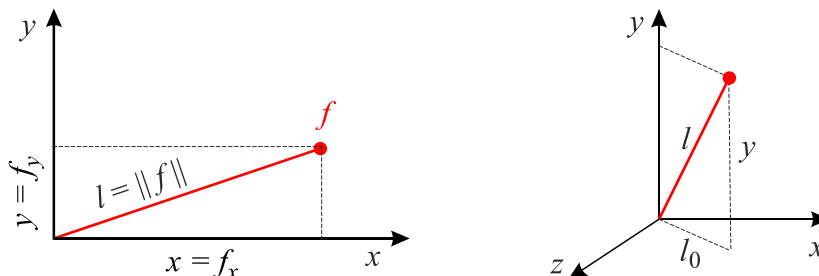
Nyní budeme abstrahovat od konkrétních matematických objektů (tyčí, uspořádaných trojic) a na první místo postavíme vlastnosti operací natahování a skládání. Zavedme lineární vektorový prostor:

Lineárním vektorovým prostorem rozumíme jakékoli matematické objekty (vektory, matice, funkce, řešení diferenciálních rovnic), které umíme natahovat a skládat tak, jako jsme to dělali s původními tyčemi. Jediným našim požadavkem bude, aby nové struktury byly opatřeny oběma operacemi, a ty splňovaly vlastnosti 1 až 4 z posledního rámečku.

Norma vektoru

Velikost neboli normu vektoru můžeme snadno určit z Pythagorovy věty. Podle obrázku pro dvoudimenzionální a třídimenzionální případ platí:

$$\begin{aligned} \| \mathbf{f} \|_{2D} = |\mathbf{f}| &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \| \mathbf{f} \|_{3D} = |\mathbf{f}| &= \sqrt{l_0^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + z^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{119}$$



Je zřejmé, že ve větším počtu dimenzí bude možné Eukleidovskou normu definovat vztahem

$$\| \mathbf{f} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}. \tag{120}$$

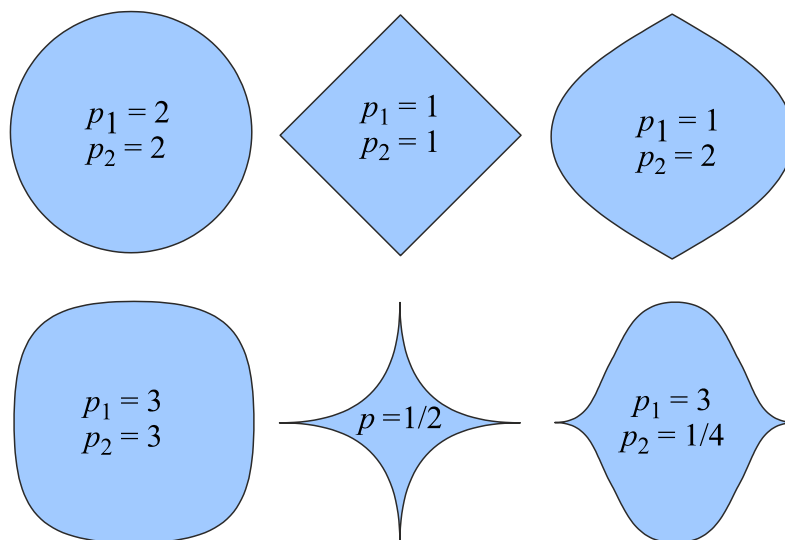
Norma se někdy označuje dvojitou svislou čarou a někdy jednoduchou, tj. stejným symbolem jako absolutní hodnota. Pojem normy lze rozšířit i na tzv. p - q normu definovanou vztahem

$$\| \mathbf{f} \| = \left(|x_1|^{p_1} + |x_2|^{p_2} + \dots + |x_N|^{p_N} \right)^{1/q}. \tag{121}$$

Pro $p_k = q = 2$ tato norma splývá s běžně definovanou Eukleidovskou vzdáleností. Samozřejmě by bylo třeba se detailně zabývat tím, zda takto definovaná norma splňuje naše představy o velikosti vektoru, například trojúhelníkovou nerovnost atd. Takový rozbor nalezneme čtenář v učebnicích matematiky. Ukažme, jak vypadá jednotková kružnice, tj. množina bodů, které mají od počátku vzdálenost rovnou jedné, v různých p - q normách:

$$|x|^{p_1} + |y|^{p_2} = 1 \tag{122}$$

Na následujícím obrázku jsou zakresleny tyto „kružnice“ pro různé hodnoty exponentů.



Skalární součin

S vektory můžeme provádět nejen natahování a skládání, ale i další operace. Máme-li k dispozici dva vektory \mathbf{f} a \mathbf{g} , můžeme jejich indexy ponechat různé a vytvořit tak dvojrozměrnou tabulku čísel, která splňuje určitá transformační pravidla, a říkáme jí tenzor druhého řádu

$$\begin{aligned} T_{kl} &\equiv f_k g_l; \\ \mathbf{T} &\equiv \mathbf{f} \otimes \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (123)$$

Tuto operaci s dvěma vektory nazýváme **tenzorový součin**. Je důležitý při popisu elektromagnetického pole, gravitace, setrvačnicků, permitivity, permeability atd. První zápis je složkový, druhý je symbolický. Tenzorový součin značíme křížkem v kolečku.

● Příklad

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (1, 2, 3); & \mathbf{g} &= (-7, -1, 2); \\ \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} f_1 g_1 & f_1 g_2 & f_1 g_3 \\ f_2 g_1 & f_2 g_2 & f_2 g_3 \\ f_3 g_1 & f_3 g_2 & f_3 g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ -14 & -2 & 4 \\ -21 & -3 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Druhou možností je oba indexy sečíst, takové operaci říkáme **skalární součin**:

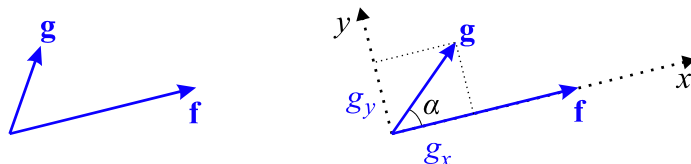
$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \equiv (\mathbf{f} | \mathbf{g}) \equiv \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \sum_{k=1}^3 f_k g_k = f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3. \quad (124)$$

Skalární součin značíme buď centrovanou tečkou, nebo kulatou závorkou nebo braketovou závorkou. Přes oba indexy se vysčítá a výsledkem je jedno jediné reálné číslo, které může být kladné, nulové či záporné. Pro běžné transformace, jako je otočení souřadnicové soustavy či inverze, nezávisí skalární součin na volbě soustavy. Takovým číslům říkáme skaláry.

● Příklad

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (1, 2, 3); & \mathbf{g} &= (-7, -1, 2); \\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} &= f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3 = -7 - 2 + 6 = -3. \end{aligned}$$

Vezměme si dva libovolné vektory \mathbf{f} , \mathbf{g} a zvolme souřadnicovou soustavu co nejjednodušeji. Osu x necháme mířit ve směru prvního vektoru, osu y v rovině obou vektorů a osu z kolmo na ně (volba soustavy vždy závisí na nás):



Označíme-li velikosti vektorů f , g a úhel mezi nimi α , budou jejich souřadnice

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (f_1, f_2, f_3) = (f, 0, 0); \\ \mathbf{g} &= (g_1, g_2, g_3) = (g \cos \alpha, g \sin \alpha, 0). \end{aligned} \quad (125)$$

Snadno nyní nalezneme skalární součin obou vektorů podle definice:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \equiv f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3 = f g \cos \alpha = \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\| \cos \alpha. \quad (126)$$

Skalární součin dvou vektorů je tedy roven součinu jejich velikostí a kosinu sevřeného úhlu. To je velmi důležité. Zopakujme si ještě, že tento výsledek bude vždy stejný, bez ohledu na volbu souřadnicové soustavy.

A k čemu je skalární součin dobrý? Za jeho pomoci můžeme určit úhel mezi dvěma vektory:

$$\blacktriangleright \quad \cos \alpha = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}}{\|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\|}. \quad (127)$$

Snadné je také určit velikost vektoru. Postačí oba vektory ve vztahu (126) položit stejné a dostaneme $\mathbf{f} \cdot \mathbf{f} = \|\mathbf{f}\|^2$. Odsud snadno určíme velikost (je dána odmocninou ze skalárního součinu vektoru se sebou samým)

$$\blacktriangleright \quad \|\mathbf{f}\| = \sqrt{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}}. \quad (128)$$

Skalární součin také umožní výpočet mechanické práce po dráze, působí-li na objekt síla \mathbf{F} :

$$\blacktriangleright \quad \Delta A = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (129)$$

● Příklad

Zadání: Nalezněte velikost a vzájemný úhel vektorů $\mathbf{f} = (1, 3, 0)$, $\mathbf{g} = (2, 2, 0)$.

Řešení: Nejprve nalezneme velikosti obou vektorů:

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{10};$$

$$\|\mathbf{g}\| = \sqrt{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}} = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} = \sqrt{8}.$$

Nyní již snadno nalezneme úhel mezi oběma vektory:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}}{\|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\|} = \frac{f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z}{\sqrt{10} \sqrt{8}} = \frac{8}{\sqrt{80}} \doteq 0,89.$$

Odpovídající úhel je přibližně 27° . Nakreslete si oba vektory a zkontrolujte výpočet graficky. ▀

Pro skalární součin platí Schwartzovo lemma, které je užitečné při různých odhadech a plyne okamžitě ze vztahu (126):

$$\blacktriangleright \quad |\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}| \leq \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\|. \quad (130)$$

Zapamatujte si:

- Skalární součin je dán vztahem $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \equiv f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3$.
- Skalární součin lze také zapsat jako $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\| \cos \alpha$.
- Pro skalární součin platí Schwartzovo lemma $|\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}| \leq \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\|$.
- Skalární součin je číslo, které nezávisí na volbě souřadnicové soustavy.
- Skalárního součinu umožňuje určit úhel mezi vektory $\cos \alpha = \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} / (\|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\|)$.
- Velikost vektoru je vždy rovna $\|\mathbf{f}\| = \sqrt{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}}$.

* * *

Prostory reálných a komplexních n -tic

Za pomoci vztahů (118) jsme rozšířili pojem vektoru na obecnější objekty, než jsou uspořádané trojice a zavedli lineární vektorový prostor. Nyní analogicky rozšíříme pojem skalárního součinu pro různé lineární vektorové prostory.

\mathcal{R}^N prostor reálných N -tic

Přechod od uspořádaných trojic k většímu počtu dimenzí je přímočarý. Veškeré odvozené vlastnosti zůstávají zachovány, ať už jde o velikost vektoru chápanou jako odmocninu ze skalárního součinu prvku se sebou samým, definici úhlu mezi dvěma prvky, Schwartzovo lemma i další vztahy. Ve skalárním součinu bude součet probíhat namísto do tří do N :

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N) \quad , \quad \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_N) \quad ; \quad f_l, g_l \in \mathcal{R}, \quad (131)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \equiv f_1 g_1 + \dots + f_N g_N = \sum_{k=1}^N f_k g_k . \quad (132)$$

\mathcal{C}^N prostor komplexních N -tic

Připusťme nyní, že složky vektoru jsou komplexní čísla. Takový předpoklad s sebou přinese problém při definici velikosti vektoru, neboť definice skalárního součinu (132) nezajišťuje, že velikost vektoru bude nezáporné reálné číslo. Z vlastností komplexních čísel ale víme, že pro velikost komplexního čísla platí

$$\|f\| = \sqrt{\bar{f} f} = \sqrt{(x-iy)(x+iy)} = \sqrt{x^2 + y^2} . \quad (133)$$

U komplexní N -tice by proto bylo přirozené, aby platilo

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{\bar{f}_1 f_1 + \dots + \bar{f}_N f_N} = \sqrt{|f_1|^2 + \dots + |f_N|^2} . \quad (134)$$

Tomu musíme přizpůsobit definici skalárního součinu a jeden z argumentů skalárního součinu brát komplexně sdružený (dohodou levý):

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N) \quad , \quad \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_N) \quad ; \quad f_l, g_l \in \mathcal{C}, \quad (135)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \equiv \bar{f}_1 g_1 + \dots + \bar{f}_N g_N = \sum_{k=1}^N \bar{f}_k g_k . \quad (136)$$

Takto definovaný skalární součin je obecně komplexní číslo. Skalární součin prvku se sebou samým je ale vždy reálné nezáporné číslo, takže lze zachovat definici normy jako odmocniny

$$\blacktriangleright \quad \|\mathbf{f}\| \equiv \sqrt{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}} = \sqrt{\bar{f}_1 f_1 + \dots + \bar{f}_N f_N} = \sqrt{|f_1|^2 + \dots + |f_N|^2} \quad (137)$$

Pro reálné N -tice splyne naše nová definice s původním vztahem (132), takže jde o přímé rozšíření této definice. Opět platí Schwartzovo lemma, stejným způsobem lze zavést definici úhlu mezi dvěma prvky (v tomto případě komplexního) atd. Vše, co umíme z prvotních „tyčí“, zůstane v platnosti.

● Příklad

Nalezněte velikost a skalární součin vektorů $\mathbf{f} = (i, 3)$, $\mathbf{g} = (1, 2i)$. Postup je přímočarý:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\| &\equiv \sqrt{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}} = \sqrt{\bar{f}_1 f_1 + \bar{f}_2 f_2} = \sqrt{-i i + 3^2} = \sqrt{10} ; \\ \|\mathbf{g}\| &\equiv \sqrt{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}} = \sqrt{\bar{g}_1 g_1 + \bar{g}_2 g_2} = \sqrt{1^2 + (-2i)(2i)} = \sqrt{5} ; \\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} &\equiv \bar{f}_1 g_1 + \bar{f}_2 g_2 = (i)(1) + (3)(2i) = 7i . \end{aligned} \quad (138)$$

Prostory posloupností

Dalším zobecněním bude přechod od komplexních N -tic ke komplexním posloupnostem, které mají nekonečný počet prvků. Takové prostory označujeme l^2 („el dva“). Skalární součin rozšíříme přímočaře:

$$\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n, \dots\} = \{f_l\}_{l=1}^{\infty}, \quad |\mathbf{g}\rangle = \{g_l\}_{l=1}^{\infty}; \quad f_l, g_l \in \mathbb{C}, \quad (139)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \equiv f_1^* g_1 + \dots + f_n^* g_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^* g_k = f_k^* g_k. \quad (140)$$

Takto definovaný skalární součin má smysl jen pro konvergentní posloupnosti. Do prostoru l^2 můžeme zahrnout jen takové prvky \mathbf{f} , pro které je $\|\mathbf{f}\| < \infty$, tj. požadujeme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k f_k < \infty \quad \text{pro } \forall \mathbf{f} \in l^2. \quad (141)$$

Potom je

$$|\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k g_k \right| \leq \|\mathbf{f}\| \cdot \|\mathbf{g}\| < \infty \quad \text{pro } \forall |\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle \in l^2, \quad (142)$$

neboť Schwartzovo lemma platí i v případě nekonečných posloupností. Do prostoru l^2 tedy patří jen posloupnosti sčítatelné s kvadrátem, proto symbol „2“ v názvu prostoru. Například posloupnost $\mathbf{f} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ nepatří do prostoru l^2 , protože

$$\|\mathbf{f}\| \equiv \sqrt{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}} = \sqrt{1 + 2^2 + 3^2 + \dots} = \infty,$$

naopak posloupnost $\mathbf{f} = \{1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots\}$ patří do prostoru l^2 , protože

$$\|\mathbf{f}\| \equiv \sqrt{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}} = \sqrt{1^2 + (1/2)^2 + (1/4)^2 + \dots} < \infty.$$

Prostor komplexních funkcí reálné proměnné

Při dalším zobecnění prostoru l^2 si můžeme index k představit spojité. Místo k budeme psát $x : f_x$. Výraz f_x není ale nic jiného než komplexní funkce reálné proměnné (spojitého indexu), kterou je zvykem zapisovat ve tvaru $f(x)$, tj.

$$\mathbf{f} \equiv f_x \equiv f(x), \quad \mathbf{g} \equiv g_x \equiv g(x), \quad ; \quad x \in \mathcal{R}, \quad f, g \in \mathbb{C}, \quad (143)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) g(x) dx. \quad (144)$$

Prostor označujeme \mathcal{L}^2 . Analogicky jako v l^2 je třeba do prostoru zahrnout jen prvky s normou splňující $\|\mathbf{f}\| < \infty$, tj.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \quad \text{pro } \forall f(x) \in \mathcal{L}^2. \quad (145)$$

Vzhledem ke Schwartzově lemmatu, které platí i pro integrály, je

$$|\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}| \leq \|\mathbf{f}\| \cdot \|\mathbf{g}\| < \infty \quad \text{pro } \forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{L}^2 \quad (146)$$

a skalární součin má smysl. \mathcal{L}^2 se někdy nazývá *prostor funkcí integrovatelných s kvadrátem*. Lze ho definovat i pro jiný definiční obor než $(-\infty, \infty)$, potom píšeme $\mathcal{L}^2(\mathcal{M})$, kde \mathcal{M} je definiční obor funkcí $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{M})$. Nyní můžeme přistoupit k obecné definici prostorů se skalárním součinem.

► Příklad

Zadání: Určete na prostoru $\mathcal{L}^2(0,1)$ funkcí integrovatelných s kvadrátem na intervalu $(0, 1)$ velikosti a vzájemný úhel funkcí $f(x) = 1$, $g(x) = x^2$.

Řešení: Postup je zcela přímočarý:

$$\|f\|^2 = \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} = (f | f) = \int_0^1 1 dx = 1; \quad \Rightarrow \quad \|f\| = 1;$$

$$\|g\|^2 = \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} = (g | g) = \int_0^1 x^2 x^2 dx = \frac{1}{5}; \quad \Rightarrow \quad \|g\| = 1/\sqrt{5};$$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = (f | g) = \int_0^1 \bar{f} g dx = \int_0^1 1x^2 dx = 1/3;$$

$$\cos \alpha = \frac{(f | g)}{\|f\| \|g\|} = \frac{1/3}{1 \cdot 1/\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 42^\circ.$$

► Příklad

Zadání: Určete na prostoru $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ skalární součin funkcí $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin 2x$.

Řešení: Postup je opět přímočarý:

$$(f | g) = \int_0^{2\pi} \bar{f} g dx = \int_0^{2\pi} \sin x \sin 2x dx = \int_0^{2\pi} \sin x 2 \sin x \cos x dx =$$

$$2 \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos x dx = |\sin x \equiv \xi| = \left[2 \frac{\xi^3}{3} \right]_{\dots}^{\dots} = \left[2 \frac{\sin^3(x)}{3} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Výsledek znamená, že funkce f a g jsou na sebe kolmé. Dokonce platí, že funkce $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}$ jsou kolmé každá na každou a tvoří ortogonální bázi na prostoru funkcí $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$. Zkuste si sami dokázat, že platí $\|\sin x\| = \sqrt{\pi}$.

Unitární prostor (prostor se skalárním součinem)

Unitárním prostorem nazveme lineární vektorový prostor \mathcal{V} (s operací skládání $+$: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ a operací natahování \cdot : $\mathbb{C} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$), na kterém je definována další operace

$$(\cdot | \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$$

(tzv. skalární součin) s vlastnostmi

$$\begin{aligned} 1) & \quad (\mathbf{f} | \mathbf{g} + \mathbf{h}) = (\mathbf{f} | \mathbf{g}) + (\mathbf{f} | \mathbf{h}), \\ 2) & \quad (\mathbf{f} | \alpha \mathbf{g}) = \alpha (\mathbf{f} | \mathbf{g}), \\ 3) & \quad (\mathbf{g} | \mathbf{f}) = \overline{(\mathbf{f} | \mathbf{g})} \quad \Rightarrow \quad (\alpha \mathbf{f} | \mathbf{g}) = \bar{\alpha} (\mathbf{f} | \mathbf{g}), \\ 4) & \quad (\mathbf{f} | \mathbf{f}) \geq 0 \quad ; \quad (\mathbf{f} | \mathbf{f}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f} = 0 \end{aligned} \quad (147)$$

První dvě podmínky v definici znamenají linearitu v pravém argumentu. Z třetí operace plyne antilinearita v levém argumentu (aditivnost + vytknutí komplexně sdružené konstanty). Pokud je prostor se skalárním součinem úplný, tj. každá konvergentní posloupnost konverguje k prvku prostoru, nazýváme ho *Hilbertův prostor*.

Konvoluce

Zkusme nyní lineární maticovou transformaci

$$g_k = \sum_l A_{kl} f_l \quad (148)$$

přepsat do prostoru funkcí. Diskrétní indexy k, l nahradíme spojitými indexy x, y a sumaci změňme na integraci. Výsledek bude:

$$\blacktriangleright \quad g(x) = \int A(x, y) f(y) dy. \quad (149)$$

Uvedené zobrazení se nazývá *konvoluce*, funkce dvou proměnných $A(x, y)$ je tzv. konvoluční jádro. Mezi konvoluce patří většina integrálních transformací. Podle volby funkce A můžeme mít Fourierovu transformaci, Laplaceovu transformaci, Abellovu transformaci a mnohé další. Konvoluce není nic jiného než maticové násobení se spojitými indexy, proto ji symbolicky zapisujeme jako

$$\blacktriangleright \quad g = A * f. \quad (150)$$

Konvoluce přiřadí funkci f novou funkci g za pomoci „předpisu“ A . Je-li funkce A funkcí jen jedné jediné proměnné, u konvoluce automaticky předpokládáme integraci

$$\blacktriangleright \quad g(x) = \int A(x - y) f(y) dy. \quad (151)$$

Za pomoci konvoluce s tzv. Greenovou funkcí lze snadno nalézt řešení některých parciálních diferenciálních rovnic. K této úloze se vrátíme v kapitole 8.

● Příklad

Zadání: Nalezněte konvoluci $A(x, y) = (x - y)^2$ s funkcí $f(x) = x$ na prostoru $\mathcal{L}^2(0, 1)$

Řešení:

$$\begin{aligned} g(x) = A * f &= \int_0^1 A(x, y) f(y) dy = \int_0^1 (x - y)^2 y dy = \int_0^1 (x^2 y - 2xy^2 + y^3) dy = \\ &= \left[x^2 \frac{y^2}{2} - 2x \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$



4. VEKTOROVÝ SOUČIN

Prvky lineárního vektorového prostoru už umíme natahovat, skládat a můžeme s nimi dělat skalární součin. Ve fyzice je ale důležitá i další operace, tzv. vektorový součin, který dvěma vektorům přiřadí uspořádanou trojici, jejíž vlastnosti v některých ohledech připomínají vektory. Budeme postupovat obdobně jako u skalárního součinu. Danou operaci zavedeme, ukážeme si, kde může být užitečná, a pak se budeme zabývat jejími vlastnostmi a operaci nakonec zobecníme na jakékoli objekty splňující tyto vlastnosti.

Symetrické a antisymetrické matice

V teorii matic jsou velmi důležité symetrické a antisymetrické matice. Symetrické matice splňují relaci

$$\blacktriangleright \quad S_{kl} = S_{lk}, \quad (152)$$

tj. záměna indexů nemá na matici vliv. Prvky vzniklé překlopením matice kolem diagonály jsou stejné pod diagonálou i nad diagonálou. Příkladem může být matice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4i \\ 2 & i & -1 \\ 4i & -1 & 5 \end{pmatrix}. \quad (153)$$

U symetrických matic postačí zadat prvky na diagonále a prvky nad diagonálou (jsou označeny modrými kolečky). Ostatní prvky snadno dopočteme:

$$(\bullet); \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \circ & \bullet \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \bullet \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ & \bullet \end{pmatrix}. \quad (154)$$

V jedné dimenzi existuje u symetrických matic jediný nezávislý prvek, ve dvou dimenzích tři prvky, ve třech šest prvků a ve čtyřech deset. Gravitační pole je v obecné relativitě popsáno symetrickou maticí 4×4 (tzv. metrickými koeficienty, které popisují zakřivení časoprostoru), proto je obecná relativita založena na deseti parciálních diferenciálních rovnicích pro tyto koeficienty. Druhou skupinou jsou antisymetrické matice, jejichž prvky splňují relaci

$$\blacktriangleright \quad A_{kl} = -A_{lk}. \quad (155)$$

Antisymetrická matice má na diagonále nuly, například pro prvek A_{22} při výměně indexů platí

$$A_{22} = -A_{22} \quad \Rightarrow \quad 2A_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{22} = 0. \quad (156)$$

Příkladem antisymetrické matice může být

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 5 \\ -i & 0 & -1 \\ -5 & +1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (157)$$

U antisymetrické matice postačí zadat jen prvky nad diagonálou a celá matice je určena:

$$(0); \quad \begin{pmatrix} 0 & \bullet \\ \circ & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & \bullet & \bullet \\ \circ & 0 & \bullet \\ \circ & \circ & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & 0 & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & 0 & \bullet \\ \circ & \circ & \circ & 0 \end{pmatrix}. \quad (158)$$

V jedné dimenzi nemá antisymetrická matice žádný nezávislý prvek, ve dvou dimenzích jeden jediný, ve třech dimenzích tři a ve čtyřech dimenzích existuje 6 nezávislých prvků. Elektromagnetické pole je v časoprostoru popsáno tenzorem elektromagnetického pole, antisymetrickou maticí 4×4 , proto při popisu elektromagnetického pole potřebujeme šest veličin – tři složky elektrického pole a tři složky magnetického pole.

Pokud sečteme součiny všech odpovídajících si prvků antisymetrické a symetrické matice (stejného tvaru), vždy dostaneme nulu:

$$\blacktriangleright \quad A_{kl}S_{kl} = 0. \quad (159)$$

V zápise je použita sumační konvence, tj. sčítá se přes obě dvojice indexů k, l . Pokud rozepíšeme všechny sčítance, bude vždy jeden kladný a jeden záporný a navzájem se vyruší. V součtu bude například člen $A_{25}S_{25}$, ale i $A_{52}S_{52}$, který má díky antisymetrii matice \mathbb{A} opačné znaménko. Obecný důkaz lze provést přejmenováním indexů, využitím symetrie a dalším přejmenováním indexů:

$$A_{kl}S_{kl} = A_{op}S_{op} = -A_{po}S_{po} = -A_{kl}S_{kl}. \quad (160)$$

Přečteme-li si začátek a konec, vidíme, že

$$A_{kl}S_{kl} = -A_{kl}S_{kl} \quad \Rightarrow \quad 2A_{kl}S_{kl} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{kl}S_{kl} = 0. \quad (161)$$

Pokud máme obecnou matici, která nejví ani symetrii, ani antisymetrii, vždy ji můžeme rozložit na symetrickou a antisymetrickou část takto:

$$\blacktriangleright \quad M_{kl} = \frac{1}{2}(M_{kl} + M_{lk}) + \frac{1}{2}(M_{kl} - M_{lk}). \quad (162)$$

První část výrazu je zjevně symetrickou maticí, druhá antisymetrickou maticí. Každou matici lze proto rozložit na symetrickou a antisymetrickou část. Předpokládejme nyní, že matice vznikla jako tenzorový součin dvou vektorů:

$$M_{kl} = f_k g_l. \quad (163)$$

Rozklad na symetrickou a antisymetrickou část nyní bude

$$M_{kl} = \frac{1}{2}(f_k g_l + f_l g_k) + \frac{1}{2}(f_k g_l - f_l g_k). \quad (164)$$

Antisymetrické výrazy v druhé kulaté závorce, například $f_2 g_3 - f_3 g_2$ jsou ve skutečnosti složkami vektorového součinu. K velmi užitečným symetrickým maticím patří Koneckerovo delta a k antisymetrickým maticím Leviho-Civitův symbol:

$$\blacktriangleright \quad \delta_{kl} = \begin{cases} 0; & k \neq l, \\ 1; & k = l. \end{cases} \quad (165)$$

$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} \varepsilon_{klm} &= -\varepsilon_{lkm}, \\ \varepsilon_{klm} &= -\varepsilon_{mlk}, & \varepsilon_{123} &= 1; \\ \varepsilon_{klm} &= -\varepsilon_{kml}. \end{aligned} \quad (166)$$

Kroneckerovo delta jsou prvky jednotkové matice. Má na diagonále jedničky a mimo diagonálu nuly. Leviho-Civitův symbol vypadá složitěji, ale není tomu tak. Jde o totálně antisymetrický tenzor ve všech dvojicích indexů. Tedy záměna libovolných dvou indexů vede na změnu znaménka. Takový symbol má jeden jediný nezávislý prvek a všechny ostatní lze dopočítat. Za tento nezávislý prvek se volí $\varepsilon_{123} = 1$. Jakékoli prvky Leviho-Civitova symbolu s dvěma stejnými indexy jsou nulové (to je dáno antisymetrií), například

$$\varepsilon_{112} = \varepsilon_{322} = \varepsilon_{222} = \varepsilon_{313} = \dots = 0. \quad (167)$$

Nenulové prvky musí mít všechny tři indexy různé a lze je dopočíst z ε_{123} , například:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{123} &= 1, \\ \varepsilon_{213} &= -\varepsilon_{123} = -1, \\ \varepsilon_{312} &= -\varepsilon_{132} = +\varepsilon_{123} = +1 \\ &\text{atd.}\end{aligned}\tag{168}$$

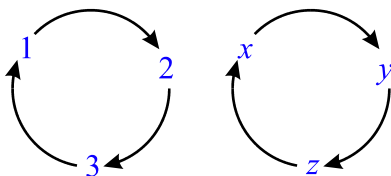
Hodnoty Leviho-Civita symbolu tedy jsou pouze 0, +1, nebo -1.

Vektorový součin

Vektorový součin dvou vektorů \mathbf{f} , \mathbf{g} budeme značit $\mathbf{h} = \mathbf{f} \times \mathbf{g}$ nebo $\mathbf{h} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ nebo $\mathbf{h} = [\mathbf{f} | \mathbf{g}]$. Jeho složky jsou definovány vztahy:

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \quad h_1 &= f_2 g_3 - f_3 g_2, \\ h_2 &= f_3 g_1 - f_1 g_3, \\ h_3 &= f_1 g_2 - f_2 g_1.\end{aligned}\tag{169}$$

Na první pohled vypadá tato definice možná poněkud děsivě, ale ve skutečnosti je jednoduchá. Stačí si zapamatovat vztah pro první složku. Po jedničce na levé straně jdou indexy dva a tři na pravé straně (minus obráceně). Pokud si zapamatujete tento vztah, máte vyhráno. Vše ostatní dostanete cyklickou záměnou: po jedničce jde dvojka, po dvojce trojka a po trojce zase jednička. Nebo po indexu x jde y , poté z a po něm zase x :



Výsledkem je trojice čísel, která má podobné vlastnosti vektorům. Někdy tomuto útvaru říkáme *pseudovektor*.

● Příklad

Zadání: Nalezněte vektorový součin vektorů $\mathbf{f} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{g} = (4, 5, 6)$.

Řešení: Vyjdeme přímo z definice:

$$\begin{aligned}\mathbf{f} \times \mathbf{g} &\equiv (f_2 g_3 - f_3 g_2, f_3 g_1 - f_1 g_3, f_1 g_2 - f_2 g_1) = \\ &= (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5, 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6, 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (-3, 6, -3)\end{aligned}$$

■

Počítání vektorového součinu přes determinant

Vektorový součin je možné počítat za pomoci rozvoje následujícího determinantu podle prvního řádku:

$$\begin{aligned}\mathbf{f} \times \mathbf{g} &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1(f_2 g_3 - f_3 g_2) + \mathbf{e}_2(\dots) + \mathbf{e}_3(\dots) = \\ &= (f_2 g_3 - f_3 g_2, f_3 g_1 - f_1 g_3, f_1 g_2 - f_2 g_1).\end{aligned}\tag{170}$$

Definice vektorového součinu přes Leviho-Civitův symbol

V teoretické fyzice se většinou používá definice vektorového součinu za pomoci Leviho-Civitova symbolu (s touto definicí se snadno odvozují různé vektorové identity):

$$\blacktriangleright \quad h_k = \varepsilon_{klm} f_l g_m \quad (171)$$

První index (k) je volný a vyskytuje se na obou stranách rovnosti. Indexy l a m jsou sčítací. Spočtěme například první složku:

$$h_1 = \varepsilon_{1lm} f_l g_m.$$

Vzhledem k vlastnostem Leviho-Civitova symbolu budou z celého součtu nenulové ty sčítance, v nichž se žádné indexy neopakují, tedy

$$h_1 = \varepsilon_{123} f_2 g_3 + \varepsilon_{132} f_3 g_2 = f_2 g_3 - f_3 g_2.$$

Obdobně bychom počítali další složky.

Transformační vlastnosti vektorového součinu

Už z definice (169) je patrné, že se výsledek vektorového součinu netransformuje jako vektory, ale jako součiny složek dvou vektorů. Jednotlivé části vektorového součinu $\mathbf{h} = \mathbf{f} \times \mathbf{g}$ jsou prvky matice

$$h_{kl} \equiv f_k g_l - f_l g_k = \begin{pmatrix} 0 & f_1 g_2 - f_2 g_1 & f_1 g_3 - f_3 g_1 \\ f_2 g_1 - f_1 g_2 & 0 & f_2 g_3 - f_3 g_2 \\ f_3 g_1 - f_1 g_3 & f_3 g_2 - f_2 g_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (172)$$

$$h_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & +h_3 & -h_2 \\ -h_3 & 0 & +h_1 \\ +h_2 & -h_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (173)$$

Vektorový součin se nebude transformovat jako vektory, ale jeho složky se budou transformovat jakou součiny složek vektorů, tedy jako tenzor druhého řádu:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k &= A_{kl} f_l; \\ \tilde{g}_k &= A_{kl} g_l; \\ \tilde{h}_{kl} &= A_{ko} A_{lp} f_o g_p = A_{ko} A_{lp} h_{op}. \end{aligned} \quad (174)$$

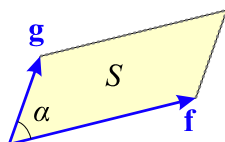
Vektorový součin je tedy antisymetrický tenzor (172) druhého řádu. Jeho matice má tři nezávislé složky, které lze poskládat jako uspořádanou trojici, které říkáme *pseudovektor*. To, že nejde o vektor, snadno uvidíme na prostorové inverzi souřadnicové soustavy (nová soustava bude mít osy $-x$, $-y$, $-z$). Při této transformaci přejde $\mathbf{f} \rightarrow -\mathbf{f}$, $\mathbf{g} \rightarrow -\mathbf{g}$, ale výsledek vektorového součinu $\mathbf{h} = \mathbf{f} \times \mathbf{g}$ se nezmění, tedy má zcela jiné transformační vlastnosti než vektory.

Význam vektorového součinu

Nalezněme nyní význam v součinu. K tomu použijeme stejnou souřadnicovou soustavu, jako tomu bylo u skalárního součinu, tj. vektory budou mít složky (125). Pro vektorový součin potom podle definice vyjde

$$\mathbf{f} \times \mathbf{g} = (0, 0, f g \sin \alpha) \quad (175)$$

Vektorový součin má složku jen v ose z , tedy míří kolmo na oba původní vektory. Jeho velikost je rovna $f g \sin \alpha$, tj. ploše rovnoběžníku „nataženého“ na oba vektory.



$$S = fg \sin \alpha$$

Pravidlo vývrtky: Přiložíme-li vývrtku na vlnu hrotem do průsečíku vektorů a otočíme s ní od prvního k druhému, bude se vývrtka pohybovat ve směru vektorového součinu. Pomocí tohoto pravidla můžeme snadno určit, který ze dvou možných kolmých směrů je ten správný.

A k čemu je vektorový součin dobrý? Pomocí vektorového součinu snadno nalezneme kolmici ke dvěma vektorům. Vektorový součin je také užitečný k výpočtu plochy rovnoběžníku. Ve fyzice použijeme vektorový součin k popisu momentu hybnosti tělesa, momentu síly nebo při pohybu elektricky nabitě částice v magnetickém poli.

● Příklad

Zadání: Nalezněte plochu rovnoběžníku nataženého na vektory $\mathbf{f} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{g} = (4, 5, 6)$.

Řešení: Z předchozího příkladu víme, že vektorový součin těchto vektorů je $(-3, 6, -3)$. Velikost tohoto vektoru (hledaná plocha) je $(9+36+9)^{1/2}$, tj. přibližně 7,35.

Zapamatujte si:

- Vektorový součin je dán vztahem $\mathbf{f} \times \mathbf{g} \equiv (f_2 g_3 - f_3 g_2, f_3 g_1 - f_1 g_3, f_1 g_2 - f_2 g_1)$.
- Vektorový součin můžeme zapsat také jako $(\mathbf{f} \times \mathbf{g})_k = \varepsilon_{klm} f_l g_m$.
- Vektorový součin můžete počítat s pomocí determinantů.
- Vektorový součin je kolmý na oba vektory \mathbf{f} , \mathbf{g} .
- Velikost vektorového součinu je plocha čtyřúhelníku nataženého na vektory \mathbf{f} , \mathbf{g} .
- Pomocí vektorového součinu můžeme snadno vytvářet kolmice.
- Vektorový součin je antisymetrický tenzor druhého řádu.
- Výsledek vektorového součinu nazýváme pseudovektor.

Vektorové identity

Při popisu fyzikálních zákonitostí se často používají nejrůznější vektorové identity. Snadno je odvodíme, pokud budeme vědět, že mezi složkami Leviho-Civita tenzoru a Kroneckerova symbolu platí jednoduchý vztah:

$$\varepsilon_{klm} \varepsilon_{kop} = \delta_{lo} \delta_{mp} - \delta_{lp} \delta_{mo} . \quad (176)$$

Tento klíčový vztah lze nejnádhleji odvodit přímým ověřením (nalevo i napravo jsou součty složené z nul, jedniček a minus jedniček. Existují ale i sofistikovanější odvození, například přes symetrie nebo z vlastností ortogonálních transformací. Pokud má čtenář zájem, může si pročíst odvození této identity na základě ortonormálních transformací:

Odvození epsilon-delta relace (176), lze přeskočit

Uvažujme ortonormální transformaci (řádky matice jsou tvořeny jednotkovými navzájem kolmými vektory)

$$\tilde{f}_k = a_{kl} f_l . \quad (177)$$

Leviho-Civitův symbol nyní můžeme za pomoci koeficientů této transformace napsat jako

$$\varepsilon_{klm} = \det \begin{pmatrix} a_{1k} & a_{1l} & a_{1m} \\ a_{2k} & a_{2l} & a_{2m} \\ a_{3k} & a_{3l} & a_{3m} \end{pmatrix}. \quad (178)$$

Zkontrolujte si, že takto zapsaný Leviho-Civitův tenzor má všechny své vlastnosti. Pokud jsou libovolné dva indexy stejné, má determinant dva sloupce shodné a je nulový. Pokud dva sloupce přehodíme, změní se znaménko determinantu (odpovídá to záměně dvou indexů), tj. Leviho-Civitův tenzor je totálně antisymetrický. Nyní využijeme postupně: 1) determinant transponované matice se nezmění; 2) součin dvou determinantů je roven determinantu ze součinu odpovídajících si matic; 3) transformace je ortogonální:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{klm}\varepsilon_{opq} &= \det \begin{pmatrix} a_{1k} & a_{1l} & a_{1m} \\ a_{2k} & a_{2l} & a_{2m} \\ a_{3k} & a_{3l} & a_{3m} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_{1o} & a_{1p} & a_{1q} \\ a_{2o} & a_{2p} & a_{2q} \\ a_{3o} & a_{3p} & a_{3q} \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} \\ a_{1l} & a_{2l} & a_{3l} \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_{1o} & a_{1p} & a_{1q} \\ a_{2o} & a_{2p} & a_{2q} \\ a_{3o} & a_{3p} & a_{3q} \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} \delta_{ko} & \delta_{kp} & \delta_{kq} \\ \delta_{lo} & \delta_{lp} & \delta_{lq} \\ \delta_{mo} & \delta_{mp} & \delta_{mq} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní je odvození už přímočaré determinant rozvineme například podle prvního řádku a ve výsledku ztotožníme první dva indexy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{klm}\varepsilon_{opq} &= \delta_{ko} (\delta_{lp}\delta_{mq} - \delta_{lq}\delta_{mp}) - \delta_{kp} (\delta_{lo}\delta_{mq} - \delta_{lq}\delta_{mo}) + \delta_{kq} (\delta_{lo}\delta_{mp} - \delta_{lp}\delta_{mo}) \Rightarrow \\ \varepsilon_{klm}\varepsilon_{kpq} &= \delta_{kk} (\delta_{lp}\delta_{mq} - \delta_{lq}\delta_{mp}) - \delta_{kp} (\delta_{lk}\delta_{mq} - \delta_{lq}\delta_{mk}) + \delta_{kq} (\delta_{lk}\delta_{mp} - \delta_{lp}\delta_{mk}) = \\ &= 3\delta_{lp}\delta_{mq} - 3\delta_{lq}\delta_{mp} - \delta_{kp}\delta_{lk}\delta_{mq} + \delta_{kp}\delta_{lq}\delta_{mk} + \delta_{kq}\delta_{lk}\delta_{mp} - \delta_{kq}\delta_{lp}\delta_{mk} = \\ &= 3\delta_{lp}\delta_{mq} - 3\delta_{lq}\delta_{mp} - \delta_{lp}\delta_{mq} + \delta_{mp}\delta_{lq} + \delta_{ql}\delta_{mp} - \delta_{mq}\delta_{lp} = \\ &= \delta_{lp}\delta_{mq} - \delta_{lq}\delta_{mp}. \end{aligned}$$

Tím je odvození hledaného vztahu ukončeno.

Příklady vektorových identit

Některé důležité vektorové identity nyní odvodíme jako jednoduché příklady, v závěru je shrneme do přehledné tabulky

● **Příklad 1:** div grad

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot (\nabla f) = \partial_k (\partial_k f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} = \Delta f.$$

Při výpočtu vyšel součet druhých derivací, což je Laplaceův operátor.

● **Příklad 2:** rot grad

$$[\text{rot grad } f]_k = [\nabla \times (\nabla f)]_k = \varepsilon_{klm} \partial_l (\partial_m f) = \varepsilon_{klm} \partial_{lm}^2 f = 0.$$

Předposlední výraz je zúžením antisymetrické a symetrické matice v indexech l, m . Podle vztahu (159) musí vyjít nula.

● **Příklad 3:** $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_k = \varepsilon_{klm} a_l (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_m = \varepsilon_{klm} a_l \varepsilon_{mop} b_o c_p = \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mop} a_l b_o c_p.$$

V posledním výrazu jsme index m v prvním Leviho-Civitově tenzoru nadvakrát přesunuli dopředu (pokaždé se změnilo znaménko), abychom mohli využít větu (176):

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_k = (\delta_{ko} \delta_{lp} - \delta_{kp} \delta_{lo}) a_l b_o c_p = a_l b_k c_l - a_l b_l c_k = b_k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Při aplikaci Kroneckerova symbolu musíme důsledně dbát na to, aby ve výrazech vždy zůstal index k , který je na levé straně rovnosti (tzv. volný index). Vektorově můžeme nyní napsat velmi známé „bác cáb“ pravidlo:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

● **Příklad 4:** div $(\mathbf{f} \times \mathbf{g})$

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= \nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \partial_k (\mathbf{f} \times \mathbf{g})_k = \\ &= \partial_k \varepsilon_{klm} (f_l g_m) = \varepsilon_{klm} (\partial_k f_l) g_m + \varepsilon_{klm} f_l (\partial_k g_m) = \\ &= g_m \varepsilon_{mkl} (\partial_k f_l) - f_l \varepsilon_{lkm} (\partial_k g_m) = \\ &= g_m (\text{rot } \mathbf{f})_m - f_l (\text{rot } \mathbf{g})_l = \mathbf{g} \cdot \text{rot } \mathbf{f} - \mathbf{f} \cdot \text{rot } \mathbf{g}. \end{aligned}$$

Ve výrazu jsme provedli derivaci součinu a poté vhodně přestěhovali index m tak, aby bylo možné napsat skalární součiny vektoru s rotací. Odvozený výraz je užitečný například při získávání zákona zachování energie z Maxwellových rovnic.

● **Příklad 5:** rot rot \mathbf{f}

$$\begin{aligned} [\text{rot rot } \mathbf{f}]_k &= [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f})]_k = \varepsilon_{klm} \partial_l (\nabla \times \mathbf{f})_m = \\ &= \varepsilon_{klm} \partial_l \varepsilon_{mop} \partial_o f_p = \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mop} \partial_l \partial_o f_p = \\ &= (\delta_{ko} \delta_{lp} - \delta_{kp} \delta_{lo}) \partial_l \partial_o f_p = \partial_l \partial_k f_l - \partial_l \partial_l f_k = \partial_k \partial_l f_l - \partial_l \partial_l f_k = \\ &= \partial_k \text{div } \mathbf{f} - \Delta f_k \quad \Rightarrow \\ &\text{rot rot } \mathbf{f} = \text{grad div } \mathbf{f} - \Delta \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Obdobně můžeme odvozovat i další užitečné identity, odvození jsou si podobná jako evropská normalizovaná vajíčka. U této epsilon-delta gymnastiky musíme dodržovat některá základní pravidla a úpravy jsou pak už automatické: nikdy nesmíme na jedné straně rovnosti přejmenovat volný index, naopak vázané (sčítací) indexy můžeme přejmenovávat jakkoli se nám to hodí. Kroneckerův výraz znamená, že následující indexy, které obsahuje, jsou si rovny (jinak je nulový). Uveďme si odvozené identity v přehledné tabulce:

Zapamatujte si:

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f, \quad (179)$$

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0, \quad (180)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (181)$$

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f} - \mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{g}, \quad (182)$$

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{f} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{f} - \Delta \mathbf{f}. \quad (183)$$

$$\blacktriangleright \quad \varepsilon_{klm} \varepsilon_{kop} = \delta_{lo} \delta_{mp} - \delta_{lp} \delta_{mo}. \quad (184)$$

Lieova algebra

Lineární vektorový prostor s operacemi skládání a natahování vektorů nazveme Lieovou algebrou, je-li v něm navíc definována operace

$$[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V \quad \text{Lieova operace} \quad \mathbf{h} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}]$$

s vlastnostmi:

$$1) \quad [\mathbf{f}, \mathbf{g}] = -[\mathbf{g}, \mathbf{f}] \quad \text{antisymetrie} \quad (185)$$

$$2) \quad [\mathbf{f} + \mathbf{g}, \mathbf{h}] = [\mathbf{f}, \mathbf{h}] + [\mathbf{g}, \mathbf{h}] \quad \text{linearita} \quad (186)$$

$$3) \quad [\alpha \mathbf{f}, \mathbf{g}] = \alpha [\mathbf{f}, \mathbf{g}] \quad \text{linearita} \quad (187)$$

$$4) \quad [\mathbf{f}, [\mathbf{g}, \mathbf{h}]] + [\mathbf{g}, [\mathbf{h}, \mathbf{f}]] + [\mathbf{h}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]] = 0 \quad \text{Bianchiho identita} \quad (188)$$

Jde o další zobrazení, při kterém dvojici vektorů přiřadíme vektor. V případě vektorového součinu má ale tento „vektor“ poněkud jiné transformační vlastnosti než běžné vektory. Z linearity v prvním argumentu a antisymetrie plyne okamžitě linearita ve druhém argumentu. Poslední relace vznikne cyklickou záměnou z prvního členu. Tři typické příklady Lieových algeber jsou:

Množina uspořádaných trojic

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3), \quad \mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3); \quad f_k, g_k, \alpha \in C(R)$$

$$+ : \quad \mathbf{f} + \mathbf{g} \equiv (f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3),$$

$$\cdot : \quad \alpha \cdot \mathbf{f} \equiv (\alpha f_1, \alpha f_2, \alpha f_3),$$

$$[\cdot, \cdot] : \quad [\cdot, \cdot] \equiv \mathbf{f} \times \mathbf{g}.$$

Lieova operace je definována jako vektorový součin. Ověřte, že vektorový součin splňuje všechny vlastnosti Lieovy algebry (185) až (188). Ukažme zde jen, že platí poslední relace:

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}, [\mathbf{g}, \mathbf{h}]] + [\mathbf{g}, [\mathbf{h}, \mathbf{f}]] + [\mathbf{h}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]] &= \mathbf{f} \times (\mathbf{g} \times \mathbf{h}) + \mathbf{g} \times (\mathbf{h} \times \mathbf{f}) + \mathbf{h} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{h}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) + \mathbf{h}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) - \mathbf{f}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{h}) + \mathbf{f}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{f}) = 0. \end{aligned}$$

Množina čtvercových matic

Pro konkrétnost budeme uvažovat matice 2×2 s operacemi

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$a_{kl}, b_{kl}, \alpha \in C(R)$$

$$+ : \quad \mathbb{A} + \mathbb{B} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\cdot : \quad \alpha \cdot \mathbb{A} \equiv \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix},$$

$$[,] : \quad [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \equiv \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

Lieova algebra je realizována za pomoci maticového násobení jako tzv. komutátor. Je-li $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$, matice komutují a komutátor je roven nule. Komutátor opět splňuje všechny vlastnosti Lieovy algebry (185) až (188). Opět ukážeme, že platí poslední z vlastností:

$$\begin{aligned} & [\mathbb{A}, [\mathbb{B}, \mathbb{C}]] + [\mathbb{B}, [\mathbb{C}, \mathbb{A}]] + [\mathbb{C}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]] = \\ & = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C} - \mathbb{C}\mathbb{B}) - (\mathbb{B}\mathbb{C} - \mathbb{C}\mathbb{B})\mathbb{A} + \dots = \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C} - \mathbb{A}\mathbb{C}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{A} \pm \dots = 0. \end{aligned}$$

Poissonovy závorky

Na prostoru reálných funkcí reálných proměnných $f(q, p)$ lze definovat operace

$$+ : \quad f + g \equiv f(q, p) + g(q, p),$$

$$\cdot : \quad \alpha \cdot f \equiv \alpha f(q, p),$$

$$[,] : \quad [f, g] \equiv \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}.$$

Opět můžeme snadno ukázat, že Poissonovy závorky splňují vlastnosti (185) až (188).

* * *

Opět jsme narazili na třetí stupeň abstrakce. Nezáleží na volbě objektů, ale na vlastnostech operací, které s nimi vykonáváme. Vektorový součin, komutátor matic a Poissonovy závorky jsou velmi odlišné operace, přesto mají společné vlastnosti a analogické chování. Pokud lineární vektorový prostor doplníme o skalární součin, dostaneme (v případě úplnosti) *Hilbertův prostor*. Pokud lineární vektorový prostor doplníme po Lieovu operaci, dostaneme *Lieovu algebru*. Obě struktury mají skvělé uplatnění ve fyzice i v matematice. Bez Hilbertových prostorů si dnes sotva dokážeme představit kvantovou teorii. A Lieova algebra vektorového součinu je základem pro popis veškerých rotačních pohybů, komutátory matic či operátorů mají široké uplatnění v kvantové teorii a Poissonovy závorky umožňují hledat časový vývoj proměnných v klasické mechanice.



5. OD GRADIENTU K HELICITĚ

Derivace je velmi účinným nástrojem ke zjišťování vlastností funkcí. Ve fyzice nejčastěji derivujeme skalární nebo vektorová pole. Skalární pole přiřazuje poloze jednu hodnotu, například hustotu, teplotu nebo tlak, vektorové pole přiřazuje trojici hodnot, například jde o rychlostní pole, elektrické pole nebo magnetické pole:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}): \quad R^3 &\rightarrow R, \\ \mathbf{K}(\mathbf{x}): \quad R^3 &\rightarrow R^3. \end{aligned} \quad (189)$$

Pokud se pole mění s časem, přibude ještě časová souřadnice a jde o zobrazení z R^4 . V relativitě používáme čtyřvektory, takže nakonec může jít o zobrazení $R^4 \rightarrow R^4$. V teorii vlnění se používají většinou komplexní funkce, pak jde o zobrazení $R^4 \rightarrow C^4$. Jako zástupný symbol pro jakákoli pole, ať už skalární, vektorová či jiná často používáme symbol ψ . Při derivování podle prostorových souřadnic lze často využít naznačenou operaci

$$\blacktriangleright \quad \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (190)$$

Existuje velké množství nejrůznějších zápisů této operace, nejčastěji používáme symbol ∇ :

$$\nabla \equiv \text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \equiv (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \equiv \partial_k. \quad (191)$$

Všechny zápisy jsou jen zkratkou pro tutéž operaci, která se nazývá gradient. Značíme ji symbolem obráceného písmene delta ∇ a říkáme „nabla“. Název zavedl skotský matematický fyzik Peter Guthrie Tait (1831–1901) podle trojúhelníkového tvaru asyrské harfy ze 7. století př. n. l. Asýrie byla v severní Mezopotámii. Slovo *nabla* (Nbl) je z aramejštiny, která ho upravila z hebrejšského *Nev(b)el*. Stejný nástroj už ale znali Sumerové v období 3 100 před naším letopočtem. James Clerk Maxwell razil pro tento operátor název „slope“ z anglického slova znamenajícího spád či sklon. Návrh Taita ale zvítězil. Na skalární funkci je možné působit jediným způsobem, pro vektorová pole je více možností:

\blacktriangleright	$\nabla f:$	$\partial_k f$	gradient	(192)
	$\nabla \cdot \mathbf{K}:$	$\partial_k K_k$	divergence	
	$\nabla \times \mathbf{K}:$	$\varepsilon_{klm} \partial_l K_m$	rotace	
	$\nabla \otimes \mathbf{K}:$	$\partial_k K_l$	tenzorový gradient	

Gradient

Zabývejme se nyní gradientem skalární funkce. Ukážeme si, při kterých úkonech může být gradient užitečný. Půjde o derivaci ve směru, Taylorův rozvoj, konvektivní derivaci, kolmici k izoploše a vztah mezi silou a potenciální energií. Samozřejmě, že jsou i další oblasti, v nichž má gradient nezastupitelné místo.

1. Derivace ve směru

Při výpočtu parciálních derivací se k dané funkci blížíme vždy ve směru os. Připusťme nyní, že se k ní budeme blížit v obecném směru a zavedme derivaci ve směru s vztahem

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{s}) - f(\mathbf{x})}{h \|\mathbf{s}\|}. \quad (193)$$

Tuto limitu nyní snadno spočteme za pomoci Taylorova rozvoje:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_k} h s_k + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} h s_k h s_l + \dots - f(\mathbf{x})}{h \|\mathbf{s}\|} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{s_k}{\|\mathbf{s}\|}.$$

První a poslední výraz se odečte. Ve všech ostatních členech, s výjimkou druhého, zůstane veličina h , která se limitně blíží k nule. Zavedeme-li jednotkový vektor $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s}/\|\mathbf{s}\|$, máme pro derivaci ve směru užitečný vztah

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) f; \quad \boldsymbol{\sigma} \equiv \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}. \quad (194)$$

■ **Příklad:** Derivujte skalární funkci ve směru (1, 2). Postup řešení je přímočarý:

$$\mathbf{s} = (1, 2);$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right);$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \cdot (\partial_x, \partial_y) = \frac{\partial_x}{\sqrt{5}} + 2 \frac{\partial_y}{\sqrt{5}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) f = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

■

2. Taylorův rozvoj

Za pomoci gradientu lze velmi snadno zapsat první netriviální člen Taylorova rozvoje skalárního či vektorového pole ve třech dimenzích:

$$\psi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \psi(\mathbf{x}) + \frac{\partial \psi}{\partial x_k} h_k + \dots = \psi(\mathbf{x}) + h_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \dots$$

Vztah nyní snadno zapíšeme s pomocí operace gradientu do finálního tvaru:

$$\blacktriangleright \quad \psi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \psi(\mathbf{x}) + (\mathbf{h} \cdot \nabla) \psi + \dots \quad (195)$$

Uvedený vztah je elegantní a ve fyzice se velmi často používá.

3. Konvektivní derivace

Předpokládejme, že máme nějaké pole, které se mění v čase i v prostoru a naším úkolem je nalézt jeho úplnou časovou derivaci:

$$\frac{d\psi(t, \mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_k} u_k,$$

kde jsme jako označili rychlostní pole proudění $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$. Využijeme-li gradient, máme:

$$\blacktriangleright \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \psi; \quad \text{resp.} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla). \quad (196)$$

První část derivace je parciální derivace v čase, vyjadřuje lokální změny funkce. Druhá část se nazývá *konvektivní* derivace a popisuje změny funkce způsobené prouděním.

Typickým využitím je například pohybová rovnice elementu tekutiny:

$$\Delta m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \Delta \mathbf{F}.$$

Rovnici vztáhneme na jednotku objemu a rozepíšeme úplnou časovou derivaci podle (196):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (197)$$

kde \mathbf{f} je hustota sil působících na tekutinu.

4. Kolmice k izoploše

Obecnou nadplochu v N dimenzích můžeme implicitně zapsat jako

$$\phi(x_1, \dots, x_N) = \text{const}. \quad (198)$$

Příkladem může být rovnice povrchu koule ve třech dimenzích $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Obecně v N dimenzích představuje rovnice (198) $N-1$ rozměrnou množinu. Ve dvou dimenzích jde o křivku, ve třech dimenzích o plochu. Stejným způsobem můžeme zapsat rovnici konstantních ploch nějaké veličiny, tzv. izoploch – například izoterm pro teplotu, izobar pro tlak nebo izofot pro intenzitu světla. Za ϕ jen dosadíme příslušnou veličinu. Diferencujeme nyní vztah (198):

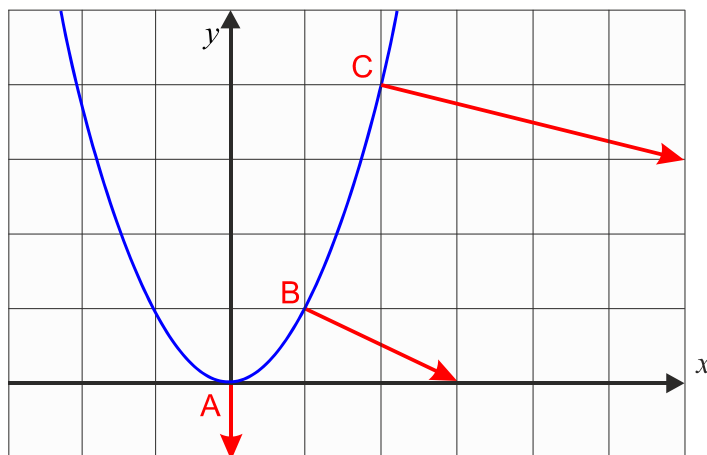
$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx_k = 0; \quad \Rightarrow \quad (\nabla \phi | d\mathbf{l}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \phi \perp d\mathbf{l}. \quad (199)$$

Gradient funkce ϕ je tedy kolmý na libovolný vektor plochy vedený z daného bodu. Tedy gradient je kolmý na izoplochu definovanou rovnicí (198). Derivace je směrnici funkce, proto gradient míří kolmo z dané izoplochy k dalším izoplochám s vyšší hodnotou. Kolmici k izoploše lze tedy nalézt velmi snadno:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \nabla \phi; \\ \mathbf{v} &= \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \end{aligned} \quad (200)$$

První varianta je obecná normála, druhá je normála normovaná k jedné, tj. normálový vektor \mathbf{v} má velikost rovnou jedné. U uzavřené plochy vždy volíme normálový vektor tak, aby z ní mířil směrem ven.

● **Příklad:** Nalezněte kolmice k parabole $y = x^2$ v různých bodech.



Rovnici nejprve přepíšeme do implicitního tvaru

$$\phi(x, y) = x^2 - y = 0 \quad (201)$$

Nyní už snadno nalezneme gradient, který je kolmý na nadplochu (v tomto případě parabolu):

$$\mathbf{n} = \nabla \phi = (2x, -1). \quad (202)$$

Pokud dosadíme různé body z obrázku, dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_A &= (0, -1); \\ \mathbf{n}_B &= (2, -1); \\ \mathbf{n}_C &= (4, -1). \end{aligned} \quad (203)$$

■

5. Síla a energie

Předpokládejme, že máme potenciální pole, v němž se práce koná na úkor potenciální energie

$$dA = -dW_p. \quad (204)$$

Vykonanou práci nyní vyjádříme jako sílu násobenou dráhou a kosinem sevřeného úhlu a poté rozepíšeme diferenciál na pravé straně:

$$\begin{aligned} F ds \cos \alpha &= -\frac{\partial W_p}{\partial x} dx_k, \\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= -\nabla W_p \cdot d\mathbf{s}, \\ (\mathbf{F} | d\mathbf{s}) &= (-\nabla W_p | d\mathbf{s}). \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že uvedený vztah platí pro jakýkoli element dráhy $d\mathbf{s}$, musí platit

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{F} = -\nabla W_p. \quad (205)$$

Uvedený vztah říká, že síla míří vždy k minimu potenciální energie. U konzervativního pole tedy postačí k jeho popisu jediná skalární veličina – potenciální energie. Odpovídající sílu už vždy dostaneme ze vztahu (205). Například pro gravitační pole tělesa o hmotnosti M , které se nachází v počátku souřadnic a působí na těleso o hmotnosti $m \ll M$ máme:

$$W_p = -G \frac{mM}{r}. \quad (206)$$

Jednotlivé složky síly už snadno nalezneme:

$$\begin{aligned} F_k &= -\frac{\partial W_p}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[G \frac{mM}{r} \right] = GmM \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x_k} = \\ &= GmM \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{\partial x_k} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{x_k}{r}. \end{aligned} \quad (207)$$

Skutečně jsme dostali správnou hodnotu složek sil včetně směrového vektoru:

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (208)$$

Snadno nalezneme velikost síly:

$$F = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{\frac{G^2 m^2 M^2}{r^6} (x^2 + y^2 + z^2)} = G \frac{mM}{r^2}. \quad (209)$$

Divergence

Velmi důležitou úlohou je zjištění, zda v nějakém bodě prostoru vektorové pole vyvěrá (příkladem může být elektrické pole vyvěrající z kladného náboje), nebo zda daným bodem prochází, či v něm zaniká (například elektrické pole v záporném náboji). K úvahám nad touto úlohou bude užitečné zavést element toku vektorového pole:

$$\blacktriangleright \quad d\phi \equiv \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S}; \quad d\mathbf{S} = \mathbf{v} dS. \quad (210)$$

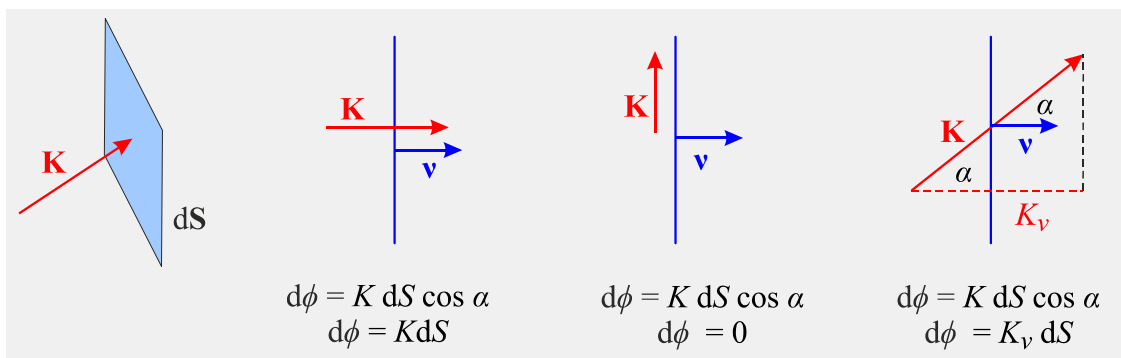
Elementární ploška je charakterizována vektorem, který má velikost této plošky a směr normály k této plošce (kolmý vektor o velikosti rovné 1). Rozměr takto zavedené veličiny je roven rozměru vektorového pole násobeného metrem na druhou:

$$[d\phi] = [\mathbf{K}] m^2. \quad (211)$$

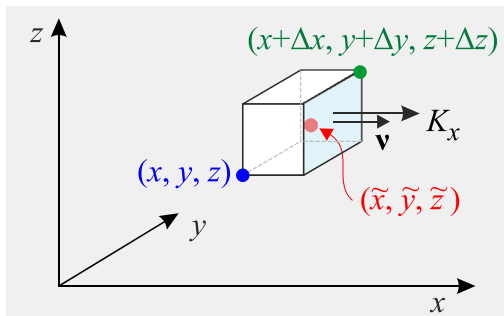
Tedy rozměr elementu toku magnetického pole bude Tm^2 , elektrického pole $Vm^{-1}m^2 = Vm$, rychlostního pole $ms^{-1}m^2 = m^3s^{-1}$ atd.

Poznámka: Tok vektorového pole se týká intenzivních vektorových veličin (nezávisí na množství látky), například elektrického., magnetického či rychlostního pole. Nezaměňujte tento tok s tokem aditivní (je úměrná množství látky) veličiny A , který je definován jako množství veličiny proteklé jednotkovou plochou za jednotku času (tok hmoty, tok energie, tok náboje, tok hybnosti, tok entropie atd.), tj. $[\mathbf{j}] = [A]/(m^2s)$. Například tok náboje má jednotku $Cm^{-2}s^{-1}$.

Z definice (210) je jasné, že tok pole ve směru normály je maximální, kolmo na normálu nulový a při šikmém toku se z vektoru pole uplatní jen jeho průmět do směru normály:



Nyní určíme celkový tok pole v plochou kvádru, který vytvoříme kolem zvoleného bodu. Později pak limitním přechodem kvádr stáhneme až do daného bodu. Tok pole bude mít celkem šest členů (přes šest plošek kvádru). Nejbližší bod kvádru k počátku souřadnic označíme (x, y, z) , nejvzdálenější $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ a máš bod, tedy střed kvádru $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Celkový tok pole \mathbf{K} plochou kvádru bude (vektor pole lokalizujeme vždy uprostřed právě počítané stěny, vektor normály míří směrem ven):



$$\Delta\phi = \sum_{a=1}^6 \Delta\phi_a.$$

Toky zapíšeme v pořadí stěn: pravá, levá, zadní, přední, horní a dolní. Stěny kvádru mají hrany o velikosti Δx , Δy , Δz , z toho snadno určíme jejich velikosti:

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= K_x(x + \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) \Delta y \Delta z - K_x(x, \tilde{y}, \tilde{z}) \Delta y \Delta z + \\ &+ K_y(\tilde{x}, y + \Delta y, \tilde{z}) \Delta z \Delta x - K_y(\tilde{x}, y, \tilde{z}) \Delta z \Delta x + \\ &+ K_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z + \Delta z) \Delta x \Delta y - K_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z) \Delta x \Delta y.\end{aligned}$$

Nyní vytkneme ze všech členů objem kvádru:

$$\Delta\phi = \left[\begin{aligned} &\frac{K_x(x + \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) - K_x(x, \tilde{y}, \tilde{z})}{\Delta x} + \\ &+ \frac{K_y(\tilde{x}, y + \Delta y, \tilde{z}) - K_y(\tilde{x}, y, \tilde{z})}{\Delta y} + \\ &+ \frac{K_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z + \Delta z) - K_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z)}{\Delta z} \end{aligned} \right] \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Provedeme-li nyní limitní přechod $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$, objeví se v hranaté závorce součet parciálních derivací

$$d\phi = \left(\frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} \right) dV. \quad (212)$$

Výraz v kulaté závorce nazýváme divergencí pole. Jde o jedno jediné číslo, které značíme

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \mathbf{K} \equiv \nabla \cdot \mathbf{K} = \partial_l K_l = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z}. \quad (213)$$

Tok pole infinitezimálním kvádrem vedeným kolem našeho zvoleného bodu tedy je

$$\blacktriangleright \quad d\phi \equiv \sum_a \mathbf{K}_a \cdot d\mathbf{S}_a = \operatorname{div} \mathbf{K} dV. \quad (214)$$

Je jasné, že hledaným testem je právě operace divergence. Pokud je kladná, z bodu pole vyvěrá, pokud je záporná, do bodu se pole noří a pokud je nulová bodem pole prochází:

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \mathbf{K} \begin{cases} > 0: & \text{pole vyvěrá,} \\ = 0: & \text{pole prochází,} \\ < 0: & \text{pole zaniká.} \end{cases} \quad (215)$$

Pokud bychom měli v prostoru konečnou množinu Ω , můžeme tok pole přes její hranici $\partial\Omega$ snadno spočítat. Oblast Ω vyplníme beze zbytku mnoha kvádry. Na jejich sousedících stěnách se tok vždy vyruší, protože vnější normály sousedních kvádrů budou mířit na opačnou stranu. Jediný nenulový tok bude na hranici oblasti, kde už žádné sousedící kvádry či jiné útvary nejsou. Proto bude platit

$$\phi \equiv \oint_{S=\partial\Omega} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V=\Omega} \operatorname{div} \mathbf{K} dV. \quad (216)$$

Levá integrace je naše sčítání toku přes jednotlivé plošky, napravo je výsledek (214). Odvozený vztah se nazývá *Gaussova věta* a je užitečný při odvozování různých vztahů ve fyzice a při převodu plošných a objemových integrálů. Gaussovu větu nejčastěji píšeme ve tvaru

$$\blacktriangleright \quad \oint_{\partial\Omega} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{K} dV. \quad (217)$$

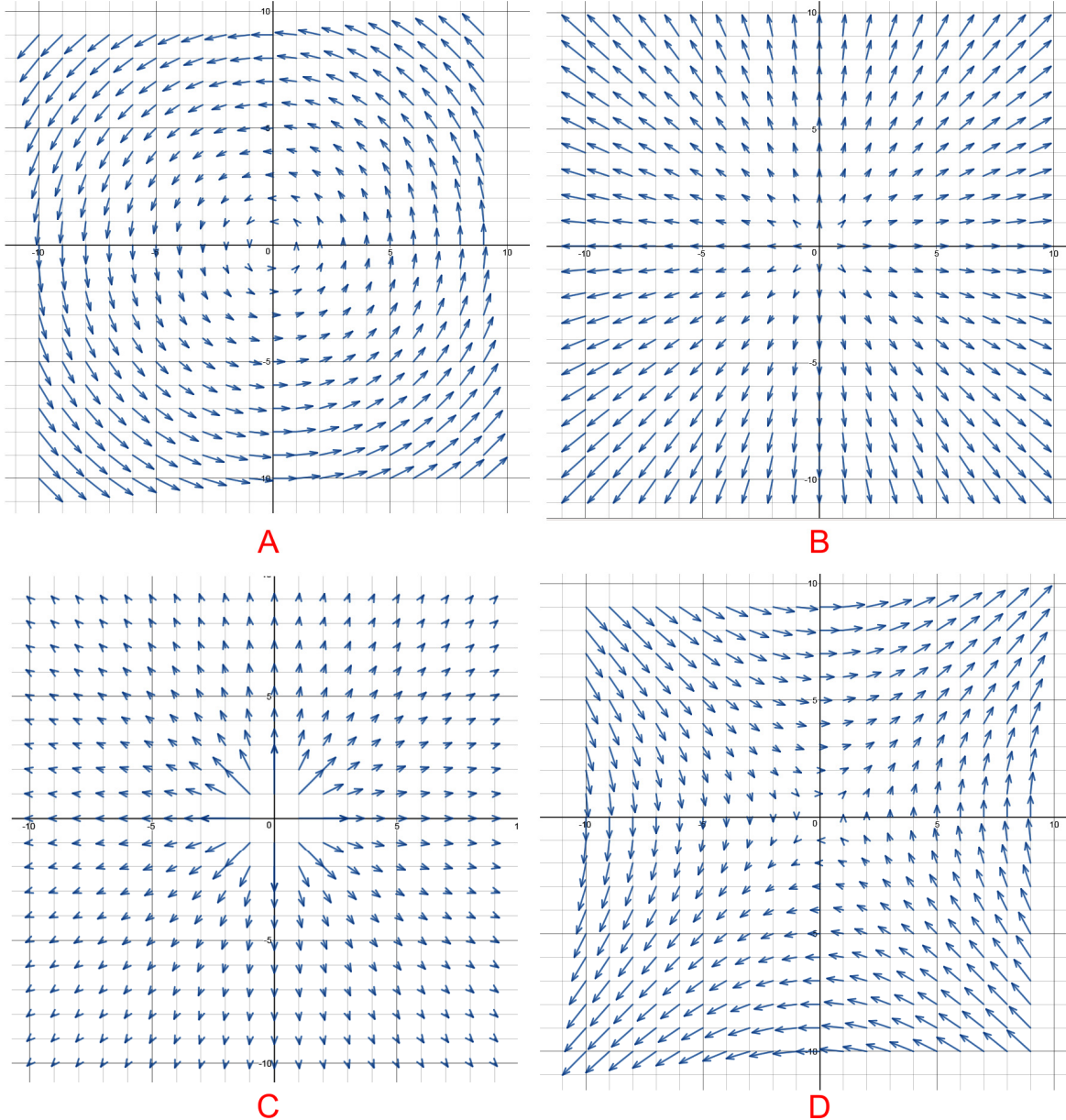
Ukažme si nyní výpočet divergence na čtyřech dvojrozměrných polích

$$\mathbf{A} = (-y, +x, 0);$$

$$\mathbf{B} = (+x, +y, 0);$$

$$\mathbf{C} = \alpha \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right); \quad (218)$$

$$\mathbf{D} = (+y, +x, 0)$$



Zakreslíme-li složky prvního pole v rovině (x, y) do obrázku, dostaneme typický vír kolem počátku, zakreslíme-li druhé pole, vzniknou radiální, stále se zvětšující vektory (úměrně vzdálenosti od počátku). Takové pole je nefyzikální a s rostoucí vzdáleností musí stále vznikat. Každý bod prostoru je jeho zdrojem. Třetí pole je intenzita elektrického pole bodového náboje, od počátku souřadnic pole klesá, jeho zdroj je pouze v počátku. Čtvrté pole nemá zjevně ani zdroje, ani netvoří víry. Spočtěme nyní divergence těchto polí:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0 + 0 = 0. \quad (219)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 1 + 1 = 2. \quad (220)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0 + 0 = 0. \quad (221)$$

První pole vytváří vír, ale nemá nikde zdroj, u druhého pole se v každém bodě prostoru vytváří radiální složka pole. Čtvrté pole nemá ani zdroje, ani víry. U třetího pole je výpočet divergence složitější, ale přímočarý:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{C} &= \partial_k C_k = \alpha \partial_k \left(\frac{x_k}{r^3} \right) = \alpha \left[\frac{(\partial_k x_k) r^3 - x_k \partial_k (r^3)}{r^6} \right] = \\ &= \alpha \left[\frac{3r^3 - x_k \frac{\partial r^3}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_k}}{r^6} \right] = \alpha \left[\frac{3r^3 - x_k 3r^2 \frac{x_k}{r}}{r^6} \right] = \alpha \left[\frac{3r^3 - 3r^3}{r^6} \right] = \begin{cases} 0; & r \neq 0, \\ \infty; & r = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (222)$$

Derivaci $\partial r / \partial x_k$ jsme již počítali ve vztahu (207), výsledek je x_k / r . Hodnota divergence je pochopitelná v tom smyslu, že zdroj pole je pouze v počátku (bodový náboj), všude jinde je divergence nulová a pole těmito body pouze prochází. Nekonečná hodnota divergence pole souvisí s tím, že náboj považujeme za bodový, tudíž je hustota náboje $\rho_Q = \Delta Q / \Delta V$ v počátku nekonečná. Je to analogické jako u pojmu hmotného bodu. Máli být nekonečně malý bod nositelem konečné hmotnosti, musí v něm být hustota hmoty $\rho_M = \Delta M / \Delta V$ nekonečná. S těmito problémy se formálně vypořádá až teorie distribucí, se kterou se seznámíme později.

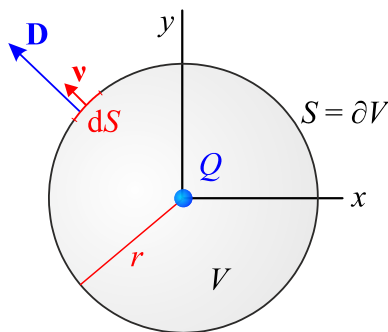
Divergence v Maxwellových rovnicích

Maxwellovy rovnice obsahují dvě položky s divergencemi:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (223)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q. \quad (224)$$

První rovnice říká, že magnetické pole každým bodem prostoru jen prochází, nikde nejsou jeho zdroje. Magnetické monopóly neexistují. Podle některých teorií je ve vesmíru magnetických monopólů hodně, ale v průběhu inflační fáze se vesmír natolik nafouknul, že v naší pozorovatelné oblasti (nevidíme celý vesmír) zůstalo jen několik magnetických monopólů, a proto je nevidíme. Druhá rovnice popisuje, že elektrická pole vyvěrají v oblastech s kladným nábojem a mizí v oblastech se záporným nábojem. Představme si, že máme jen jeden jediný izolovaný náboj. Zvolíme souřadnice s počátkem v náboji a kolem náboje opíšeme kulovou plochu. Rovnici (224) přeintegrujeme přes objem takto vzniklé koule:



$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \iiint_V \rho_Q dV. \quad (225)$$

Integrál nalevo za pomoci Gaussovy věty převedeme na ohraničující plochu. Integrál napravo dá celkový náboj uzavřený v ploše, v tomto případě náboj naší částice:

$$\oiint_{S=\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q. \quad (226)$$

Vektor elektrické indukce i vektor elementu plochy mají stejný směr, úhel mezi nimi je nulový a kosinus ve skalárním součinu roven jedné:

$$\oiint_{S=\partial V} D dS = Q. \quad (227)$$

Na celém povrchu koule je velikost D stejná, můžeme ji tedy z integrace vytknout. Zbývající integrál dá celkovou plochu ohraničující koule:

$$D 4\pi r^2 = Q. \quad (228)$$

Převedeme-li elektrickou indukci na intenzitu elektrického pole, máme výsledný integrální vztah, který není nic jiného než Coulombův zákon:

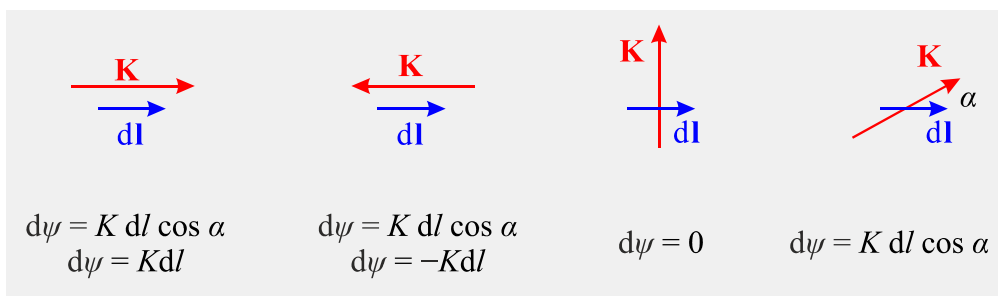
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (229)$$

Rotace

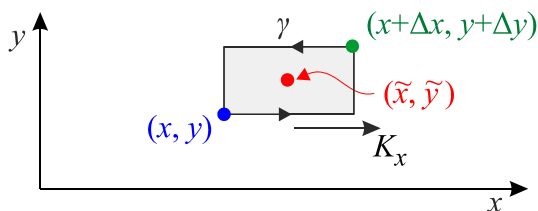
Přejdeme nyní k jiné úloze. Budeme testovat, zda naše vektorové pole vytváří v okolí zvoleného bodu vír. Pokud si představíte vír nakreslený na papíru, tak ho uvidíte pouze ze směru kolmého na papír. Bude-li se dívat v rovině papíru, vír neodhalíte. K detekci víru jsou zapotřebí tři nezávislé pohledy ze tří různých směrů. Proto bude mít test na víry vektorový charakter. Užitečným nástrojem pro naše testování bude element *cirkulace* pole:

$$d\psi \equiv \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}, \quad (230)$$

kde \mathbf{K} je sledované pole a $d\mathbf{l}$ element křivky. Teče-li pole ve směru křivky, bude cirkulace maximální, a to $K dl$, teče-li pole proti směru křivky, bude cirkulace minimální, a to $-K dl$. Teče-li pole kolmo na křivku, bude cirkulace nulová.



Představme si nyní bod v prostoru, kolem něhož nakreslíme obecně orientovaný obdélník a provedeme projekce bodu i s obdélníkem do všech tří souřadnicových rovin. V rovině (x, y) bude situace vypadat takto:



Nyní nalezneme cirkulaci pole kolem tohoto obdélníku po matematicky kladně orientované křivce γ tvořené hranami obdélníku (značení bodů je stejné jako při odvození divergence).

Příspěvky zapíšeme v pořadí: dolní, pravá, horní a levá hrana, hodnotu pole vezmeme vždy uprostřed hrany. Hrany mají velikosti Δx , Δy :

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \sum_{a=1}^4 \Delta\psi_a = K_x(\tilde{x}, y) \Delta x + K_y(x + \Delta x, \tilde{y}) \Delta y - K_x(\tilde{x}, y + \Delta y) \Delta x - K_y(x, \tilde{y}) \Delta y = \\ &= \left[\frac{K_y(x + \Delta x, \tilde{y}) - K_y(x, \tilde{y})}{\Delta x} - \frac{K_x(\tilde{x}, y + \Delta y) - K_x(\tilde{x}, y)}{\Delta y} \right] \Delta x \Delta y.\end{aligned}$$

Nyní provedeme limitní přechod $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ a dostaneme (element plochy s normálou ve směru osy z označíme jako $dS_z \equiv dx dy$):

$$d\psi = \left[\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right] dS_z. \quad (231)$$

Provedeme-li superpozici všech tří projekcí, vznikne obecný obdélník a cirkulace kolem něho bude mít hodnotu (ostatní členy získáme cyklickou záměnou)

$$d\psi = \left[\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z} \right] dS_x + \left[\frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x} \right] dS_y + \left[\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right] dS_z. \quad (232)$$

Je jasné, že v hranatých závorkách jsou složky vektorového součinu gradientu a naším vektorovým polem, proto můžeme pro element cirkulace pole psát:

$$\blacktriangleright \quad d\psi \equiv \sum_a \mathbf{K}_a \cdot d\mathbf{l}_a = (\nabla \times \mathbf{K}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (233)$$

O tom, zda je cirkulace pole kolem obdélníku nenulová (a pole tvoří vír) rozhoduje vektorový součin gradientu s polem, kterému říkáme rotace pole:

$$\blacktriangleright \quad \text{rot } \mathbf{K} \equiv \nabla \times \mathbf{K}. \quad (234)$$

Jednotlivé složky rotace korespondují s naším pohledem na vír ve směru odpovídajících si souřadnicových os. Pokud jsou všechny složky rotace nulové, pole netvoří kolem bodu vír. Pokud je libovolná složka nenulová, pole kolem daného body vytváří vír:

$$\blacktriangleright \quad \text{rot } \mathbf{K} \begin{cases} = (0, 0, 0): & \text{pole netvoří vír,} \\ \neq (0, 0, 0): & \text{pole tvoří vír.} \end{cases} \quad (235)$$

Určeme nyní rotaci polí **A**, **B**, **C**, **D** ze vztahu (218):

$$\text{rot } \mathbf{A} = (0, 0, 2); \quad \text{rot } \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{C} = \text{rot } \mathbf{D} = (0, 0, 0). \quad (236)$$

Jedině první pole má nenulovou rotaci, vír je patrný pouze při pohledu ve směru osy z . Jde o nefyzikální vír, jehož intenzita roste se vzdáleností od středu (v každém bodě prostoru je jakési dmychadlo, které vír zesiluje). Proto je rotace nenulová ve všech bodech prostoru.

Uvažujme nyní konečnou plochu S ohraničenou uzavřenou křivkou γ . Naším úkolem bude spočítat cirkulaci pole podél této křivky. Plochu ohraničenou křivkou vyplníme mnoha malými obdélníčky, které spolu sousedí. Každý obdélník představuje matematicky kladně orientovanou uzavřenou křivku. Na společných hranách bude cirkulace pole vždy nulová, neboť jsou hrany opačně orientované. Jediná nenulová cirkulace bude na hranách přiléhajících k hranici našeho útvaru. Limitním přechodem z (233) máme

$$\blacktriangleright \quad \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{K}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (237)$$

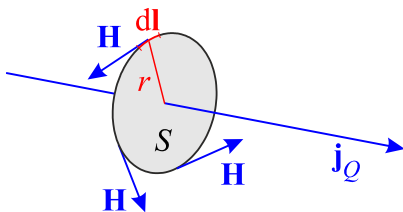
což je *Stokesova věta* integrálního počtu, která převádí plošný integrál na křivkový.

Ampérův zákon

Jedna z Maxwellových rovnic má pro případ polí nezávisících na čase tvar

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q, \quad (238)$$

kde \mathbf{j}_Q je proudová hustota (tok náboje, tj. množství náboje proteklého jednotkovou plochou za jednotku času, rozměr je ampér na metr čtvereční). Význam rovnice je jasný: kolem vodičů s tekoucím proudem vzniká vír magnetického pole. Vytvořme kolem některého místa vodiče kružnici, plochu, kterou uzavírá, označíme S :



Přes tuto plochu budeme integrovat rovnici (238):

$$\iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S}. \quad (239)$$

Integrál napravo dá celkový proud protékající plochou, tj. proud tekoucí vodičem. Integrál nalevo převedeme na integrál přes hranici za pomoci Stokesovy věty:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \quad (240)$$

Pole i element křivky mají souhlasný směr, proto je skalární součin roven součinu velikostí obou vektorů, tj.

$$\oint_{\gamma=\partial S} H dl = I. \quad (241)$$

Pole H má na celém obvodu kruhu stejnou velikost, proto ho vytkneme z integrálu. Ten dá obvod kružnice:

$$H 2\pi r = I. \quad (242)$$

Po převedení na magnetickou indukci získáme Ampérův zákon v dobře známém tvaru

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (243)$$

Pole buzené lineárním útvarem ubývá ze vzdáleností jako $1/r$. Pole buzená bodovými útvary (například Coulombův zákon) ubývají se vzdáleností jako $1/r^2$. Maxwellova rovnice (238) je diferenciálním tvarem Ampérova zákona.

Helicita

V přírodě často pozorujeme útvary stočené do šroubovic. Ať už jde o molekuly DNA nebo jen plazmový výboj, který měl dostatek času a po nějaké době se stočil do šroubovice. V teorii plazmatu se ukazuje (viz učebnice a přednášky k tomuto tématu), že helikální (šroubovitá) struktura magnetického pole má minimální energii. Proto například v tokamaku nepostačí jen poloidální pole vznikající tekoucím proudem, ale musí být přítomno i toroidální pole generované pomocnými cívkami. Vzniklé pole má šroubovicový tvar, je ve stavu s minimální energií, a proto je relativně stabilní. V matematice se pro podobně strukturovaná pole zavádí pojem helicity. Hustota helicity vektorového pole \mathbf{K} se definuje jako

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{K} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{K}, \quad (244)$$

celkovou helicitou potom rozumíme integrál

$$G(t) = \iiint_V \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) dV. \quad (245)$$

Helicita je skalární veličina charakterizující helikálnost (šroubovitost) vektorového pole. Je nulová pro všechna pole splňující podmínku nevířivosti ($\text{rot } \mathbf{K} = 0$) a také pro všechny rovinné víry s kruhovými či spirálovitými proudnicemi. Pole s nenulovou helicitou musí tvořit prostorové šroubovice s nenulovým stoupáním α , helicita je úměrná $\sin \alpha$. Příkladem zavedení hustoty helicity může být rychlostní pole

$$\mathcal{H}_u = \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (246)$$

Veličinu $\boldsymbol{\omega} \equiv \text{rot } \mathbf{u}$ nazýváme vířivost rychlostního pole. Při popisu helikálnosti magnetického pole se využívá magnetický potenciál \mathbf{A} , který se samotným polem souvisí rovnicí $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$:

$$\mathcal{H}_A = \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (247)$$

Beltramova pole

Některá pole mají zajímavou vlastnost – jejich rotace je úměrná samotnému poli:

$$\text{rot } \mathbf{K} = \alpha \mathbf{K}. \quad (248)$$

Taková pole nazýváme Beltramova pole. Jsou pojmenovaná podle italského matematika Eugenia Beltramiho (1835–1899). Ve fyzice se těmito poli zabýval norský fyzik Kristian Birkeland (1867–1917). Koeficient úměrnosti mezi rotací pole a polem samotným se může dokonce měnit v čase i v prostoru, takový případ ale nebudeme v dalším textu uvažovat. Beltramova pole mají tři důležité vlastnosti:

1. jsou helikální,
2. jsou nezdroyová,
3. splňují Helmholtzovu rovnici.

Odvoďme nyní tato tvrzení. Hustotu helicity pole určíme přímo z definice a podmínky (248):

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{H} \equiv \mathbf{K} \cdot \text{rot } \mathbf{K} = \alpha \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = \alpha K^2. \quad (249)$$

Pokud je pole nenulové, má vždy nenulovou hustotu helicity. Beltramova pole jsou tedy podtřídou helikálních polí. Aplikujme na podmínku (248) operaci divergence:

$$\begin{aligned} \text{div rot } \mathbf{K} &= \alpha \text{div } \mathbf{K} & \Rightarrow \\ 0 &= \alpha \text{div } \mathbf{K} & \Rightarrow \end{aligned} \quad (250)$$

$$\blacktriangleright \quad \text{div } \mathbf{K} = 0. \quad (251)$$

Beltramova pole jsou tedy vždy nezdroyová (předpokládáme, že koeficient úměrnosti α je konstantní). Aplikujme nakonec na podmínku (248) operaci rotace:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{K} &= \alpha \text{rot } \mathbf{K} & \Rightarrow \\ \text{grad div } \mathbf{K} - \Delta \mathbf{K} &= \alpha \text{rot } \mathbf{K}. \end{aligned}$$

V prvním členu využijeme nezdroyovost pole ($\text{div } \mathbf{K} = 0$), na pravé straně podmínku (248). Výsledkem je Helmholtzova rovnice

$$\blacktriangleright \quad \Delta \mathbf{K} + \alpha^2 \mathbf{K} = 0. \quad (252)$$

Vektor \mathbf{K} je v tomto případě vlastním vektorem Laplaceova operátoru v odpovídající geometrii. Helmholtzovu rovnici lze také chápat jako rovnici kmitů v prostorové oblasti a ještě se k ní vrátíme. Helmholtzovu rovnici jsme získali derivováním Beltramovy podmínky (248). To je ale neekvivalentní operace, proto jen některá řešení Helmholtzovy rovnice splňují původní Beltramovu podmínku.

ABC toky

Typickým matematickým příkladem Beltramových polí jsou tzv. ABC toky:

$$\mathbf{K} = (A \cos y + B \sin z, B \cos z + C \sin x, C \cos x + A \sin y). \quad (253)$$

Jednoduchým výpočtem rotace tohoto zajímavého pole, které se využívá v teorii chaosu, dostaneme:

$$\text{rot } \mathbf{K} = \mathbf{K}. \quad (254)$$

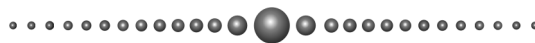
Jde tedy o pole, jehož rotace je rovna poli samotnému. Takové pole je nutně helikální.

Bezilová konfigurace

Ve fyzice plazmatu se často vyskytují konfigurace, při nichž nabitě částice obkružují siločáry a přitom podél nich kloužou. V takovém případě míří proudová hustota ve směru magnetického pole $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$ (tzv. Birkelandovy proudy). Lorentzova síla působící na částice pohybující se podél siločar je nulová, proto hovoříme o tzv. *bezilové konfiguraci*. Konfigurace má nejnižší možnou energii a disipativní plazma se k této konfiguraci vždy postupně blíží. Snadno ukážeme, že magnetické pole v bezilové konfiguraci splňuje Beltramovu podmínku. Využijeme přitom Ampérova zákona $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$:

$$\mathbf{B} \parallel \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \sim \text{rot } \mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \sim \text{rot } \mathbf{B}. \quad (255)$$

Magnetické pole v bezilové konfiguraci patří do třídy Beltramových polí a je vždy helikální.



6. VÍCEROZMĚRNÉ INTEGRÁLY

V mnoha situacích je třeba nějakou veličinu, zpravidla skalární či vektorové pole, integrovat podél křivky, přes plochu či přes objem nějakého útvaru. Za tím účelem zavádíme element (infinitesimalně malou část) dané množiny. Křivkový element může být jak skalární tak vektorový, plošný také, ale objemový element existuje jen skalární, objem, jak ho chápeme ve třech dimenzích, nemá žádný směr.

Křivkový integrál

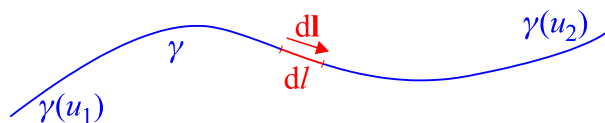
Nejprve se zabýváme křivkou, kterou označíme symbolem γ . Křivku budeme nejprve parametrizovat, k tomu postačí jediný parametr u :

$$\gamma: \begin{cases} x = x(u); \\ y = y(u); \\ z = z(u). \end{cases} \quad (256)$$

Zkráceně můžeme psát

$$\blacktriangleright \quad \gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u). \quad (257)$$

Parametr u probíhá interval u_1 až u_2 . Bod $\mathbf{r}(u_1)$ je počátečním bodem křivky, $\mathbf{r}(u_2)$ je koncovým bodem křivky. Křivku nyní rozdělíme na velké množství dílků (elementů). Toto dělení budeme zjemňovat tak, až dospějeme k infinitesimalnímu elementu křivky



$$\blacktriangleright \quad d\mathbf{l} = (dx, dy, dz) = (x' du, y' du, z' du); \quad (258)$$

Element křivky má vektorový charakter, míří ve směru křivky, proto hovoříme o *vektorovém elementu*. Můžeme zavést i pouhou velikost elementu křivky, tzv. skalární element:

$$\blacktriangleright \quad dl \equiv \sqrt{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} du, \quad (259)$$

kde čárka znamená derivaci podle parametru u . Za pomoci těchto elementů můžeme zavést dva druhy křivkových integrálů – křivkový integrál prvního druhu nasčítává skalární pole přes skalární element podél křivky, křivkový integrál druhého druhu nasčítává projekci vektorového pole do směru křivky (prezentovanou skalárním součinem) podél křivky:

$$\blacktriangleright \quad I_1 = \int_{\gamma} f(\mathbf{r}) dl, \quad (260)$$

$$\blacktriangleright \quad I_2 = \int_{\gamma} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (261)$$

Integrály prvního druhu můžeme použít například ke zjištění hmotnosti vlákna s měnícím se průřezem nebo k určení délky křivky (v tomto případě bude $f = 1$). Integrály druhého druhu se využívají k výpočtu mechanické práce (polem bude působící síla), elektrického napětí (polem bude intenzita elektrického pole) a dalších veličin. Integrály obou druhů se snadno převedou na běžný Riemannův integrál: Do obou polí (skalárního či vektorového) dosadíme parametrické vyjádření křivky a příslušný element vyjádříme z diferenciálů parametrického vyjádření křivky. Tím se veškerá integrace převede na integrál přes parametr křivky, tedy standardní jednorozměrný Riemannův integrál:

$$I_1 = \int_{\gamma} f(\mathbf{r}) dl = \int_{\gamma} f(\mathbf{r}) \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{u_1}^{u_2} f(\mathbf{r}(u)) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} du. \quad (262)$$

V případě, že za parametr zvolíme přímo x , máme

$$I_1 = \int_{\gamma} f(\mathbf{r}) dl = \int_{x_1}^{x_2} f(\mathbf{r}(u)) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx. \quad (263)$$

Pro délku rovinné křivky $y(x)$ se vztah zjednoduší na známý vzorec

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (264)$$

U křivkového integrálu druhého druhu postupujeme obdobně

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\gamma} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} K_x dx + K_y dy + K_z dz = \\ &= \int_{u_1}^{u_2} [K_x(\mathbf{r}(u))x' + K_y(\mathbf{r}(u))y' + K_z(\mathbf{r}(u))z'] du = \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \mathbf{K}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}' du. \end{aligned} \quad (265)$$

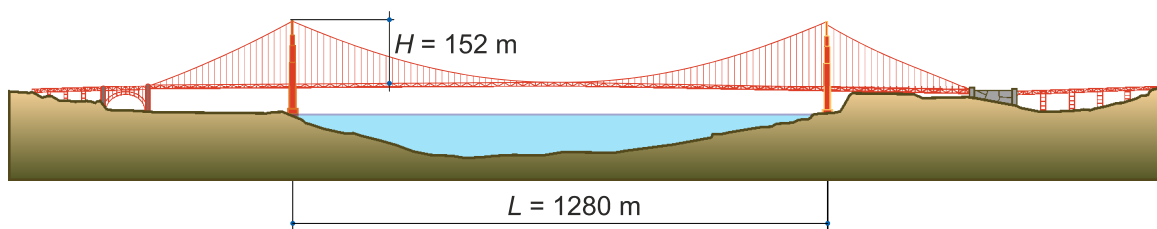
● Příklad 1: Délka sinusovky od 0 do 2π

Křivku $y = \sin(x)$ budeme parametrizovat přímo proměnnou x , tj. x ztotožníme s parametrem křivky u . Pro integraci vztah (264):

$$\begin{aligned} y(x) &= \sin(x); \\ l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx. \end{aligned} \quad (266)$$

Integrace tohoto typu jsou málokdy uskutečnitelné analyticky, většinou je třeba využít numerické metody, kterých existuje velké množství. Konkrétně tento případ vede na tzv. eliptický integrál. Existuje ale jednoduchá možnost, jak výsledek integrace rychle zjistit. Na stránce [Wolfram Alpha](#) zadejte integraci odpovídajícími příkazy softwaru Mathematica, nebo jen napište řetězec „integrate sqrt(1+cos(x)^2) dx from 0 to 2pi“. Program se pokusí spočítat integrál analyticky, pokud to nepůjde, tak numericky. Výsledek je 7,6404.

● Příklad 2: Délka lana mostu Golden Gate v San Franciscu



Budeme počítat délku lana mezi podpěrami. Předpokládejme, že lano má tvar přibližně řetězovky $ch(x)$. Za jednotku délky vezmeme rozpětí sloupů $L = 1280$ metrů a řetězovku

posuneme tak, aby byl počátek souřadnic v nejnižší části, tj. hrubý tvar bude dán funkcí $\text{ch}(x/L) - 1$. Nyní řetězovku roztáhneme na parametry mostu:

$$y(x) = A[\text{ch}(x/L) - 1] \quad (267)$$

Z požadavku $y(\pm L/2) = H$ plyne

$$A = \frac{H}{\text{ch}(1/2) - 1} = 1190,98 \text{ m}. \quad (268)$$

Nyní snadno určíme délku lana:

$$l = \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{1 + y'^2} \, dx = \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{1 + (A/L)^2 \text{sh}^2(x/L)} \, dx. \quad (269)$$

Provedme substituci $\xi = x/L$:

$$l = L \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1 + (A/L)^2 \text{sh}^2(\xi)} \, d\xi. \quad (270)$$

Řetězec pro integraci je „1280*integrate sqrt(1+0.8672 sinh(x)^2) dx from -0.5 to 0.5“, vyjde 1327 metrů. Jde jen o úsek lan mezi pilíři.

● Příklad 3: Práce vykonaná polem prostorového oscilátoru

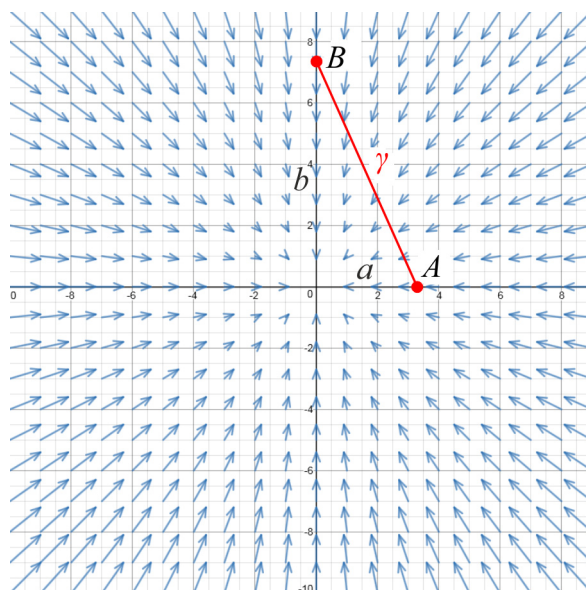
Předpokládejme průběh potenciální energie

$$W_P = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2). \quad (271)$$

Snadno určíme působící sílu $\mathbf{F} = -\nabla W_P$:

$$\begin{aligned} F_x &= -kx, \\ F_y &= -ky. \end{aligned} \quad (272)$$

V jakémkoli směru se systém chová jako harmonický oscilátor. Ať vychýlíme těleso kamkoli, bude na něho působit vratná síla směrem do počátku, která bude tím větší, čím větší bude jeho vzdálenost od počátku. Naším úkolem bude spočítat práci vykonanou při přesunutí tělesa mezi body $A = (a, 0)$ a $B = (0, b)$:



Nejprve nalezneme parametrické zadání křivky a její vektorový element:

$$X = A + (B - A)t; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle; \quad A = (a, 0); \quad B = (0, b). \quad (273)$$

$$\begin{aligned} x &= a - at, \\ y &= bt, \\ dx &= -a dt, \\ dy &= b dt. \end{aligned} \quad (274)$$

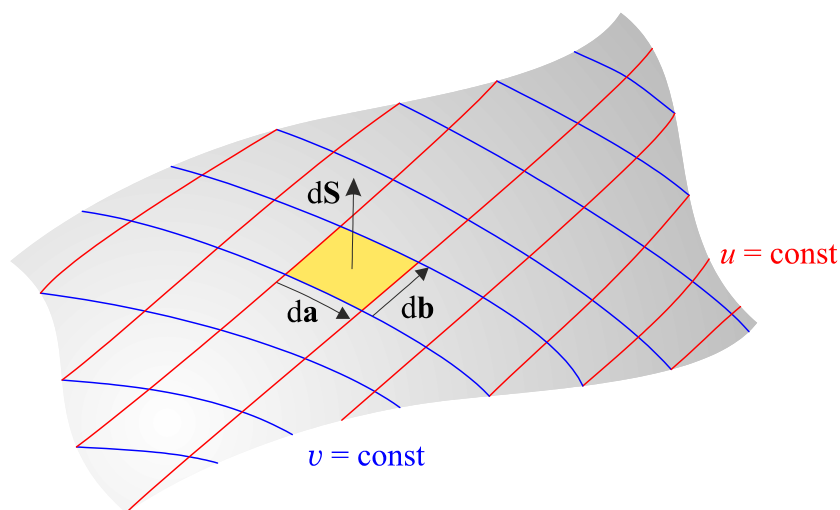
Roli parametru křivky zde hraje t , tj. $u = t$. Nyní je výpočet vykonané práce už přímočarý, jen musíme za všechna pole a diferenciály dosadit ze vztahů (274):

$$\begin{aligned} \Delta A &= \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} F_x dx + F_y dy = \int_{\gamma} -kx dx - ky dy = \\ &= \int_0^1 -k(a - at)(-a dt) - (kbt)(b dt) = \int_0^1 [ka^2 - ka^2t + kb^2t] dt = \\ &= \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kb^2. \end{aligned} \quad (275)$$

Jiné řešení. Tím, že v zadání figurovala potenciální energie, víme, že pole je konzervativní. Vykonanou práci pak můžeme určit z rozdílu potenciální energie“

$$\Delta A = -\Delta W_P = W_P(A) - W_P(B) = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kb^2. \quad (276)$$

Plošný a objemový integrál



Plochu popíšeme dvěma parametry u, v , které na ní tvoří souřadnicovou síť:

$$\sigma: \begin{cases} x = x(u, v); \\ y = y(u, v); \\ z = z(u, v). \end{cases} \quad (277)$$

Zkráceně můžeme psát

$$\sigma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v). \quad (278)$$

Element plošky vyobrazený na obrázku bude mít hrany

$$d\mathbf{a} \equiv \mathbf{r}(u + du, v) - \mathbf{r}(u, v) \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du; \quad d\mathbf{b} \equiv \mathbf{r}(u, v + dv) - \mathbf{r}(u, v) \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv. \quad (279)$$

Vektorový element plochy je dán vektorovým součinem, skalární element je jeho velikostí:

$$\blacktriangleright \quad d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv; \quad (280)$$

$$\blacktriangleright \quad dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv; \quad (281)$$

Nyní, obdobně jako u křivkových integrálů, zavedeme plošný integrál prvního druhu (nasčítání skalárního pole přes skalární element) a plošný integrál druhého druhu (tok vektorového pole plochou):

$$\blacktriangleright \quad I_1 \equiv \iint_{\sigma} f dS, \quad (282)$$

$$\blacktriangleright \quad I_2 \equiv \iint_{\sigma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} \quad (283)$$

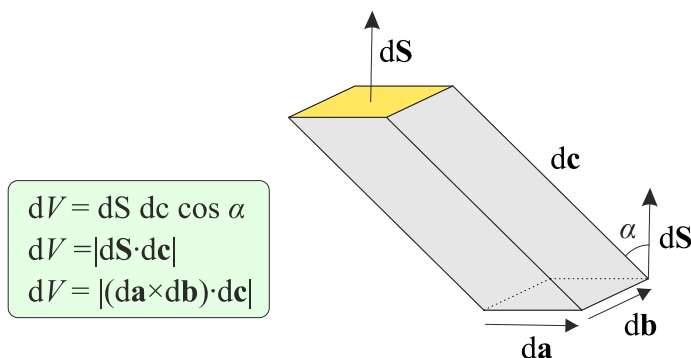
První druh využijeme k výpočtu náboje, hmotnosti či velikosti plochy, integrál druhého druhu k výpočtu toku pole plochou. Zbývá zavést objemový integrál, který má jediný element, a to skalární. Objemovou množinu Ω popíšeme třemi parametry:

$$\Omega: \begin{cases} x = x(u, v, w); \\ y = y(u, v, w); \\ z = z(u, v, w). \end{cases} \quad (284)$$

Zkráceně můžeme psát

$$\blacktriangleright \quad \Omega: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w). \quad (285)$$

Objemový element určíme analogicky dle obrázku



$$\blacktriangleright \quad dV = \left| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right| du dv dw; \quad (286)$$

A objemový integrál budeme chápat jako

$$\blacktriangleright \quad I = \iiint_V f(\mathbf{r}) dV. \quad (287)$$

● **Příklad 4:** kruh a plošný integrál. Parametrizujme kruh $x^2 + y^2 \leq R^2$ polárními souřadnicemi:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= 0. \end{aligned} \quad (288)$$

Parametry probíhají hodnoty

$$\begin{aligned} u &= r \in \langle 0, R \rangle; \\ v &= \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned} \quad (289)$$

Určeme nyní vektorový plošný element:

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} dr d\varphi = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \times (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0) dr d\varphi \Rightarrow \\ d\mathbf{S} &= (0, 0, r dr d\varphi) \end{aligned} \quad (290)$$

Vektorový element míří pouze v ose z , je tedy dle očekávání kolmý na rovinu (x, y) , v níž leží kruh. Skalární element bude jeho velikostí, tj.

$$dS = r dr d\varphi \quad (291)$$

Nyní již snadno určíme plochu kruhu

$$S = \iint_{\sigma} dS = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} r dr d\varphi = \frac{R^2}{2} 2\pi = \pi R^2. \quad (292)$$

Nalezneme nyní ještě tok pole

$$\mathbf{K} = (\alpha y, \beta z, \gamma x^2) \quad (293)$$

tímto kruhem. Výpočet je přímočarý:

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{\sigma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\sigma} K_x dS_x + K_y dS_y + K_z dS_z = \\ &= \iint_{\sigma} (0 + 0 + \gamma x^2 dS_z) = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} (\gamma r^2 \cos^2 \varphi) (r dr d\varphi) = \gamma \frac{R^4}{4} \frac{2\pi}{2} = \gamma \pi \frac{R^4}{4}. \end{aligned} \quad (294)$$

Zapamatujte si základní typy integrálů:

$$\blacktriangleright \int_{\gamma} f dl; \quad \gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u); \quad dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} du; \quad (295)$$

$$\blacktriangleright \int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}; \quad \gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u); \quad d\mathbf{l} = (x' du, y' du, z' du); \quad (296)$$

$$\blacktriangleright \iint_{\sigma} f dS \quad \sigma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v); \quad dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv; \quad (297)$$

$$\blacktriangleright \iint_{\sigma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} \quad \sigma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v); \quad d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv; \quad (298)$$

$$\blacktriangleright \iiint_{\Omega} f dV \quad \Omega: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w); \quad dV = \left| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right| du dv dw; \quad (299)$$

Integrace per partes v N dimenzích

Zopakujme si nejprve situaci v jedné dimenzi. Pro derivaci součinu dvou funkcí platí

$$f'g + fg' = (fg)'. \quad (300)$$

Integrací tohoto vztahu okamžitě máme

$$\int_a^b f'g \, dx + \int_a^b fg' \, dx = [fg]_a^b. \quad (301)$$

neboli

$$\int_a^b f'g \, dx + \int_a^b fg' \, dx = +f(b)g(b) - f(a)g(a). \quad (302)$$

Znaménka na pravé straně můžeme chápat jako jednorozměrné vnější normály k intervalu $\langle a, b \rangle$, tedy

$$\int_a^b f'g \, dx + \int_a^b fg' \, dx = \nu_b f(b)g(b) + \nu_a f(a)g(a). \quad (303)$$

Oba výrazy napravo jsou vlastně integrací přes hranici množiny $\Omega = \langle a, b \rangle$, tu u intervalu tvoří pouhé dva body. Integraci můžeme tedy formálně přepsat do tvaru

$$\int_{\Omega} f'g \, d^1x + \int_{\Omega} fg' \, d^1x = \int_{\partial\Omega} \nu f g \, d^0x. \quad (304)$$

Index nad diferenciálem určuje rozměr integrace. Integrace napravo je formální, probíhá jen přes dva body, tedy jde o sumaci. V N dimenzích platí obdobné vztahy:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} g + f \frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (fg), \quad (305)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} g + f \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) d^N x = \int_{\partial\Omega} f g \nu_k \, d^{N-1}x. \quad (306)$$

Poslední výraz je větou o integraci per partes v N dimenzích. Tato věta umožňuje přesouvat derivaci z jedné funkce na druhou. Pro $g = 1$ dá vztah důležitou relaci

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) d^N x = \int_{\partial\Omega} f \nu_k \, d^{N-1}x. \quad (307)$$

Odvoďme nyní z tohoto vztahu Gaussovu větu jako speciální případ integrace per partes ve třech dimenzích:

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial x_k} \, dV = \oiint_{S=\partial V} f \nu_k \, dS. \quad (308)$$

Nyní za funkci f vezmeme složku vektorového pole, tj. $f = K_k$ a přesčítáme přes index k :

$$\iiint_V \frac{\partial K_k}{\partial x_k} \, dV = \oiint_{S=\partial V} K_k \nu_k \, dS. \quad (309)$$

Uvedený vztah lze snadno přepsat do tvaru

$$\iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{K}) \, dV = \oiint_{S=\partial V} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{\nu}) \, dS. \quad (310)$$

Zavedeme-li vektorový element plochy $d\mathbf{S} = \mathbf{v} dS$, máme Gaussovu větu v běžném tvaru

$$\iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{K}) dV = \oint_{S=\partial V} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S}. \quad (311)$$

Vnější algebra

Jednotný přístup k různým druhům integrálů lze získat zavedením tzv. vnější algebry, jejímž základem je antisymetrické násobení diferenciálů, například

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx. \quad (312)$$

Tato operace kopíruje vlastnosti vektorového součinu bázových vektorů, samotné diferenciály chápeme jako prvky lineárního vektorového prostoru, tj. můžeme je „natahovat“ a „skládat“. Je zřejmé, že nově zavedený součin dvou stejných diferenciálů musí dát nulu, například

$$dx \wedge dx = 0. \quad (313)$$

● Příklad 1: Ukázka dvouprvkové vnější algebry

Na dvou prvcích \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2 můžeme zavést vnější algebru tak, že k těmto prvkům přidáme jednotkový prvek \mathbf{e}_0 (při násobení prvek nezmění) a výsledek vnějšího součinu \mathbf{e}_{12} . Násobení všech prvků můžeme odvodit z antikomutativnosti a asociativnosti, například

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{12}; \\ \mathbf{e}_{12} \wedge \mathbf{e}_1 &= (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_1 = -(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2 \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) = 0 \end{aligned} \quad (314)$$

a tak dále. Celkově lze výsledek násobení jednotlivých prvků zapsat do tabulky

\wedge	\mathbf{e}_0	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_{12}
\mathbf{e}_0	\mathbf{e}_0	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_{12}
\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_1	0	\mathbf{e}_{12}	0
\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_{12}$	0	0
\mathbf{e}_{12}	\mathbf{e}_{12}	0	0	0

Zaváděná algebra bude lineárním obalem těchto prvků. ▸

● Příklad 2: ukázka použití vnější algebry v integrálech

Obecnou podobu vztahu (307) lze chápat jako

$$\int_{\Omega} dF = \int_{\partial\Omega} F; \quad \text{spec. pro jednu dimenzi} \quad \int_{\langle a,b \rangle} dF = [F]_a^b. \quad (315)$$

Integrál napravo znamená hodnoty na hranici oblasti, proto zde nezapisujeme znak diferenciálu, obdobně jako v jedné dimenzi, kde hranicí jsou dva body. Samotný výraz F ale může diferenciály obsahovat. Pro Stokesovu větu je F na pravé straně dáno vztahem (počítáme cirkulaci vektoru \mathbf{K} podél γ)

$$F = \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = K_x dx + K_y dy + K_z dz. \quad (316)$$

Definujeme-li diferenciál pomocí vnějšího součinu, máme pro levou stranu:

$$dF = dK_x \wedge dx + dK_y \wedge dy + dK_z \wedge dz = \left(\frac{\partial K_x}{\partial x} dx + \frac{\partial K_x}{\partial y} dy + \frac{\partial K_x}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \\
&= (\text{rot } \mathbf{K})_x dS_x + (\text{rot } \mathbf{K})_y dS_y + (\text{rot } \mathbf{K})_z dS_z = \text{rot } \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S}.
\end{aligned}$$

Je zřejmé, že jsme ze vztahu (315) dostali jako speciální případ Stokesovu větu

$$\int_S \text{rot } \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}. \quad (317)$$

Obdobně lze postupovat u ostatních integrálů. ▀

Míra a metrika

Předpokládejme, že na zadané N -rozměrné oblasti máme metriku g_{kl} , tj. vzdálenost je v zobecněných souřadnicích q_k dána vztahem

$$\blacktriangleright \quad dl^2 = g_{kl} dq_k dq_l. \quad (318)$$

Potom lze míru dané množiny (délkový element, plošný element, objemový element, atd.) obecně zapsat jako (důkaz nalezneme čtenář ve specializované literatuře)

$$\blacktriangleright \quad d\mu = \sqrt{|\det g|} dq_1 \dots dq_N. \quad (319)$$

Všechny integrály prvního druhu lze potom zapsat jednotně ve formě

$$\blacktriangleright \quad \int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f \sqrt{|\det g|} dq_1 \dots dq_N. \quad (320)$$

▀ **Příklad:** Určete objem koule ve třech dimenzích.

Pro sférickou metriku platí:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2 \quad (321)$$

takže metrický tenzor je

$$g_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}. \quad (322)$$

pro objem koule máme

$$V = \int d\mu = \int \sqrt{|\det(g)|} dr d\varphi d\theta = \int r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta. \quad (323)$$

Po dosazení mezí dostaneme

$$V = \left(\int_0^R r^2 dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \right) = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad (324)$$

což je známý vztah pro objem koule. ▀



7. OPERÁTORY V KŘIVOČARÝCH SOUŘADNICÍCH

V mnoha aplikacích nevystačíme s kartézskými souřadnicemi, ale potřebujeme využít křivočarý souřadnicový systém (souřadnicové plochy nejsou roviny). Kartézské souřadnice budeme označovat \mathbf{r} , nebo \mathbf{x} :

$$\mathbf{r} = (x, y, z); \quad (325)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3). \quad (326)$$

Kterou notaci využijeme, závisí jen na tom, zda potřebujeme osy číslovat, či nikoli. Oba zápisy jsou ekvivalentní. Obdobně v křivočarých souřadnicích budeme psát jednu z možností

$$\mathbf{r} = (u, v, w); \quad (327)$$

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3). \quad (328)$$

Všechny čtyři zápisy popisují souřadnice téhož místa, první dva v kartézském souřadnicovém systému, zbývající v křivočarém. Vektor můžeme chápat jako rozdíl souřadnic dvou blízkých bodů (v kartézském světě tyto body nemusí být blízko, v křivočarých souřadnicích ano). Transformace souřadnic potom vyjádříme takto:

$$A_k = dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_l} dq_l = T_{kl} \tilde{A}_l; \quad (329)$$

$$\tilde{A}_k = dq_k = \frac{\partial q_k}{\partial x_l} dx_l = U_{kl} A_l. \quad (330)$$

Složky vektoru bez vlnek jsou kartézské, složky s vlnkami křivočaré. Od jedné ke druhé se transformujeme lineární transformací, tj. složky vyjádřené v jedné soustavě jsou lineární kombinací složek vyjádřených v soustavě druhé. Transformační matice \mathbf{T} a \mathbf{U} se nazývají Jacobiho matice příslušných transformací:

$$T_{kl} \equiv \frac{\partial x_k}{\partial q_l}; \quad (331)$$

$$U_{kl} \equiv \frac{\partial q_k}{\partial x_l}. \quad (332)$$

Obě transformace jsou navzájem inverzní, tj. součin obou transformačních matic dá jednotkovou matici:

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{U})_{kl} = \frac{\partial x_k}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial x_l} = \frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}. \quad (333)$$

Souřadnicové plochy v křivočarých souřadnicích (ve 2D souřadnicové linii) jsou dány izoplochami

$$q_k = \text{const.} \quad (334)$$

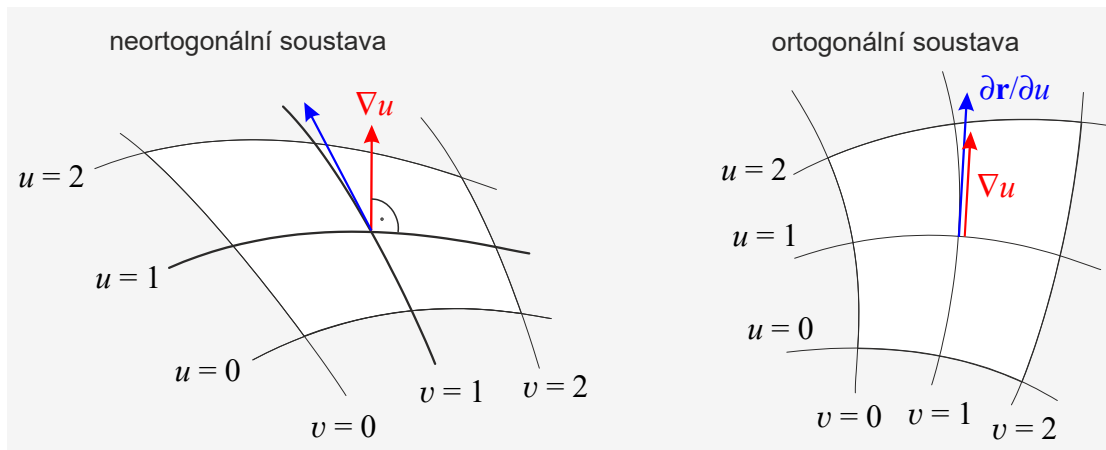
Křivočaré souřadnice a Laméovy koeficienty

Nakresleme si nyní souřadnicovou síť dvou křivočarých souřadnic u, v . Kolmice na souřadnicovou plochu $u = \text{const}$ bude dána gradientem $\mathbf{n} = \partial u / \partial \mathbf{r}$ a na obrázku je ve zvoleném místě zakreslena červeným vektorem. Naopak tečna z daného bodu vedená podél druhé souřadnicové linie bude dána vektorem $\boldsymbol{\tau} = \partial \mathbf{r} / \partial u$:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{n} = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right); \quad (335)$$

$$\blacktriangleright \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right). \quad (336)$$

Složky obou vektorů jsou tvořeny prvky Jacobiho matic a jejich orientace je zakreslena v následujícím obrázku. První z nich (červený) je kolmicí na souřadnicovou plochu, druhý (modrý) je tečnou k souřadnicové linii.



Ani jeden z těchto vektorů není normovaný a míří různým směrem, neboť nakreslená souřadnicová soustava není ortogonální. Vhodnou kombinací souřadnic lze vždy dosáhnout ortogonálnosti (souřadnicové plochy a linie se protínají pod pravými úhly). Zajišťuje to tzv. Schmidtovo ortogonalizační lemma. Běžně používané válcové a sférické souřadnice ortogonální jsou. Proto se v dalším textu omezíme jen na ortogonální souřadnice, v nichž oba výše zmíněné vektory (normála k souřadnicové ploše a tečna k souřadnicové linii) mají stejný směr a míří ve směru jednotkového vektoru \mathbf{e}_u . Vzhledem k tomu, že skalární součin vektorů \mathbf{n} a $\boldsymbol{\tau}$ daných vztahy (335) a (336) je zjevně roven jedné, můžeme psát:

$$\blacktriangleright \quad \boldsymbol{\tau} = h_u \mathbf{e}_u; \quad (337)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{n} = \frac{1}{h_u} \mathbf{e}_u. \quad (338)$$

Škálovací parametr h_u se nazývá *Laméův koeficient* a vyjadřuje kolikanásobně je tečný vektor delší než jednotkový. Pokud jednotkový vektor vynásobíme Laméovým koeficientem, získáme vektor $\boldsymbol{\tau}$, pokud ho vydělíme tímto koeficientem, získáme vektor \mathbf{n} (oba nyní míří stejným směrem). Koeficienty jsou pojmenovány podle francouzského matematika Gabriela Lamého. V obecném případě jsou Laméovy koeficienty dány vztahy (dále v této kapitole nepoužíváme sumační konvenci)

$$\boldsymbol{\tau}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = h_k \mathbf{e}_k. \quad (339)$$

Odsud okamžitě máme vztahy pro jednotlivé Laméovy koeficienty

$$\blacktriangleright \quad h_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k} \right)^2}. \quad (340)$$

Máme-li k dispozici příslušné vztahy pro přechod od křivočarách ke kartézským souřadnicím, můžeme okamžitě určit Laméovy koeficienty. Mnohdy je ale pohodlnější Laméovy koeficienty určit geometricky, tj. ze vzdálenosti dvou blízkých bodů:

$$d\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 = h_1 \mathbf{e}_1 dq_1 + h_2 \mathbf{e}_2 dq_2 + h_3 \mathbf{e}_3 dq_3. \quad (341)$$

Pro vzdálenost potom máme

$$\blacktriangleright \quad dl = \sqrt{h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2}. \quad (342)$$

Je jasné, že jde o zobecnění Pythagorovy věty, pod odmocninou jsou druhé mocniny jednotlivých odvěsen (ve 3D) a u nich díky křivočarosti souřadnic stojí jako koeficienty Laméovy škálovací parametry. Právě tento vztah umožňuje určovat Laméovy koeficienty geometricky. Posuneme-li se infinitezimálně ve směru k -té souřadnice, změní se vzdálenost jako

$$dl_k = h_k dq_k. \quad (343)$$

Postupně se tedy budeme posouvat s bodem ve směru jednotlivých souřadnicových linií, určíme příslušnou vzdálenost a „odečteme“ si příslušný Laméův koeficient.

Kartézské souřadnice (x, y, z)

V kartézských souřadnicích tvoří souřadnicové plochy navzájem kolmé roviny a posunutí ve směru jednotlivých souřadnicových os jsou

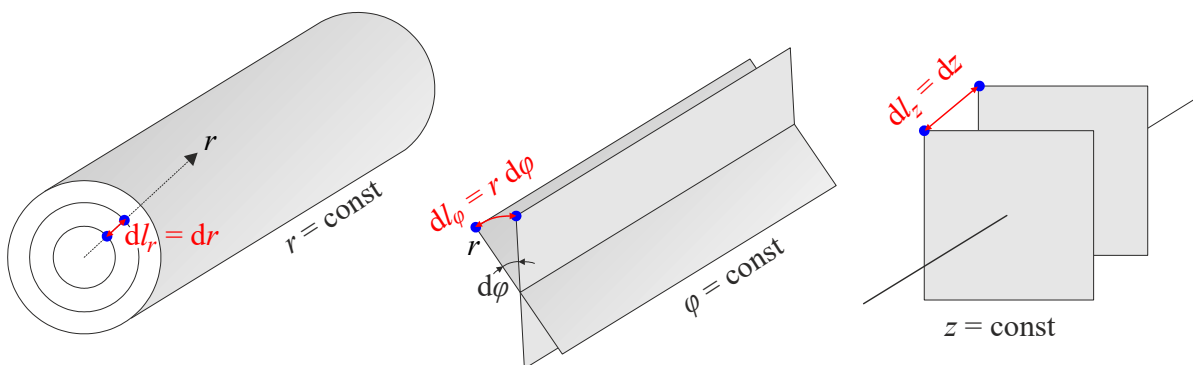
$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} dl_x = dx &\Rightarrow h_x = 1 \\ dl_y = dy &\Rightarrow h_y = 1 \\ dl_z = dz &\Rightarrow h_z = 1 \end{aligned} \quad (344)$$

S těmito koeficienty získá Pythagorova věta (342) běžný tvar: vzdálenost dvou bodů (ve 3D úhlopříčka kvádrů) je součet druhých mocnin rozdílů vzdáleností (odvěsen kvádrů).

Válcové souřadnice (r, φ, z)

Válcové souřadnice mají preferovanou osu. Vzdálenost od této osy značíme r a je první souřadnicí. Plochy konstantní souřadnice r jsou soustředné válcové plochy. Druhou souřadnicí je azimutální úhel měřený kolem osy od nějakého počátku. Označujeme ho φ a je druhou souřadnicí. Plochy konstantního azimutálního úhlu tvoří vějíř rovin, jimiž prochází osa. Poslední souřadnicí je vzdálenost měřená podél osy, označujeme ji z . Plochy konstantní souřadnice z tvoří roviny kolmé na osu. Soustava všech tří ploch je ortogonální, tj. každá je kolmá na každou. Jednotlivá posunutí a příslušné Laméovy koeficienty jsou (viz obrázek):

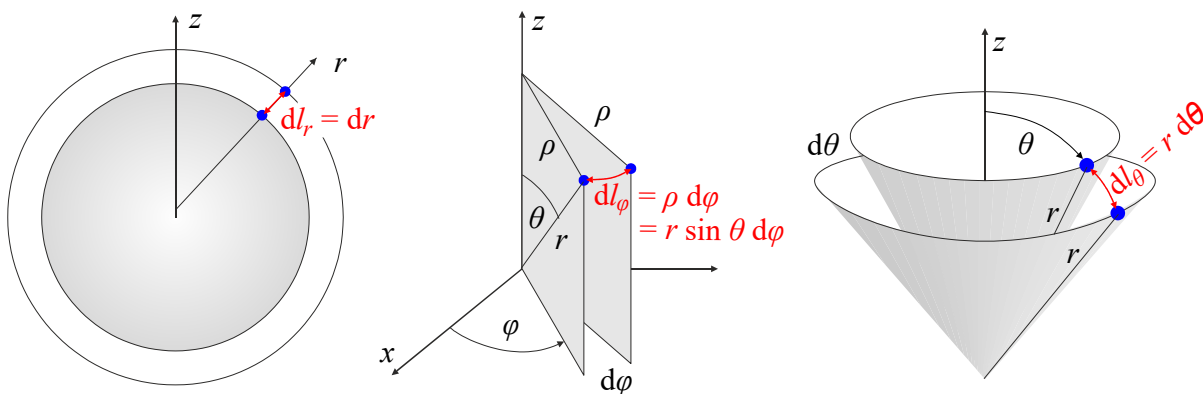
$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} dl_r = dr &\Rightarrow h_r = 1 \\ dl_\varphi = r d\varphi &\Rightarrow h_\varphi = r \\ dl_z = dz &\Rightarrow h_z = 1 \end{aligned} \quad (345)$$



Sférické souřadnice (r, φ, θ)

Sférické souřadnice využívají preferovanou osu s počátkem, jímž prochází základní souřadnicová rovina. Zpravidla se za preferovanou osu volí kartézská osa z a za základní rovinu kartézská rovina (xy) . První souřadnicí je vzdálenost daného místa od počátku, označujeme ji r . Souřadnicové plochy s konstantním r tvoří povrchy soustředných sfér. Druhou souřadnicí je azimutální úhel φ měřený v základní souřadnicové rovině. Pokud vznikla z kartézských souřadnic, měří se azimut od osy x . Souřadnicové plochy s konstantním azimutem tvoří vějíř rovin se společnou přímkou, kterou je osa souřadnic. Poslední souřadnicí je odklon od osy z označovaný θ . Souřadnicové plochy tvoří soustava různě rozevřených kuželů s vrcholem v počátku. Soustava všech tří souřadnicových ploch je ortogonální, tj. každá je kolmá na každou. Souřadnice tvoří radiální vzdálenost a dva úhly. Jednotlivá posunutí a příslušné Laméovy koeficienty jsou (viz obrázek):

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad dl_r &= dr & \Rightarrow & \quad h_r = 1 \\ dl_\varphi &= r \sin \theta d\varphi & \Rightarrow & \quad h_\varphi = r \sin \theta \\ dl_\theta &= r d\theta & \Rightarrow & \quad h_\theta = r \end{aligned} \quad (346)$$

**Gradient**

Vyjádření gradientu v křivočarých souřadnicích je víceméně přímočaré:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \mathbf{r}} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{1}{h_k} \mathbf{e}_k \quad \Rightarrow \quad (347)$$

$$\blacktriangleright \quad \nabla f = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right). \quad (348)$$

V kartézských, válcových a sférických souřadnicích po dosazení máme:

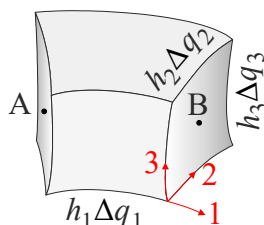
$$\begin{aligned} \text{kartézské} \quad \nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right); \\ \text{válcové} \quad \nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{r \partial \varphi}, \frac{\partial f}{\partial z} \right); \\ \text{sférické} \quad \nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{r \sin \theta \partial \varphi}, \frac{\partial f}{r \partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (349)$$

Divergence

V kartézských souřadnicích jsme divergenci zavedli jako test na zdrojovost polí. Integrovali jsme tok pole přes malý hranol, který jsme poté limitně zmenšili k nule. Vedlejším produktem výpočtu byla Gaussova věta

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{K} \, dV, \quad (350)$$

která je zapsána nezávisle na volbě souřadnicového systému. Aplikujme ji nyní v křivočarých souřadnicích na malý křivostěnný kvádr \mathcal{K} , jehož stěny tvoří souřadnicové plochy.



Později opět tento kvádr limitně zmenšíme k nule, tj. do bodu, v němž divergenci počítáme:

$$\operatorname{div} \mathbf{K} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\partial\mathcal{K}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S}. \quad (351)$$

Takováto definice divergence kopíruje definici z kartézského souřadnicového systému, ale je na volbě souřadnic nezávislá. Divergence má význam hustoty toku pole elementárním kvádrem. Vzhledem k limitnímu zmenšování objemu můžeme tok pole nahradit součtem toků přes jednotlivé stěny kvádrů:

$$\operatorname{div} \mathbf{K} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{k=1}^6 \mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{S}_k. \quad (352)$$

Výpočet je relativně přímočarý, proto ho ukážeme jen pro dvojici stěn kolmou na první osu (pravou a levou). Na obou plochách se do toku započítává jen složka pole K_1 , na pravé stěně je tok kladný (vnější normála míří ve směru složky pole K_1), na levé straně záporný:

$$\operatorname{div} \mathbf{K} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{h_1 \Delta q_1 h_2 \Delta q_2 h_3 \Delta q_3} [K_1(B) h_2(B) \Delta q_2 h_3(B) \Delta q_3 - K_1(A) h_2(A) \Delta q_2 h_3(A) \Delta q_3 + \dots].$$

$$\operatorname{div} \mathbf{K} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{K_1(B) h_2(B) h_3(B) - K_1(A) h_2(A) h_3(A)}{\Delta q_1} + \dots \right] \rightarrow \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial h_2 h_3 K_1}{\partial q_1} + \dots \right]$$

Příspěvky zbývajících dvojic stěn můžeme buď spočítat obdobně, nebo doplnit z cyklické záměny indexů:

$$\blacktriangleright \operatorname{div} \mathbf{K} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial h_2 h_3 K_1}{\partial q_1} + \frac{\partial h_3 h_1 K_2}{\partial q_2} + \frac{\partial h_1 h_2 K_3}{\partial q_3} + \dots \right] \quad (353)$$

Toto je obecný vztah pro divergenci. Pro naše tři případy máme

kartézské	$\operatorname{div} \mathbf{K} = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z};$	
\blacktriangleright válcové	$\operatorname{div} \mathbf{K} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r K_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial K_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial K_z}{\partial z};$	(354)
sférické	$\operatorname{div} \mathbf{K} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 K_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial K_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta K_\theta)}{\partial \theta}.$	

Laplaceův operátor

Laplaceův operátor lze vyjádřit jako

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f. \quad (355)$$

Tento zápis nezávisí na volbě souřadnic a Laplaceův operátor je tedy možné zkonstruovat z předpisu (348) pro gradient a předpisu (353) pro divergenci:

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial K_1}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial K_2}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial K_3}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (356)$$

Pro námi sledované systémy je výsledek

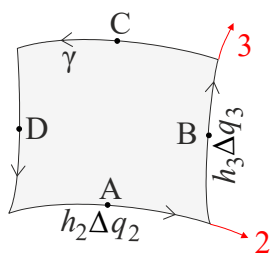
kartézské	$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2};$	
▶ válcové	$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2};$	(357)
sférické	$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}.$	

Rotace

U posledního ze základních operátorů budeme postupovat obdobně jako u divergence. V kartézských souřadnicích jsme divergenci zavedli jako test na vírovost polí. Integrovali jsme cirkulaci pole přes hranici malého obdélníku, který jsme poté limitně zmenšili k nule. Vedlejším produktem výpočtu byla Stokesova věta

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{K}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (358)$$

kteřá je zapsána nezávisle na volbě souřadnicového systému. Aplikujme ji nyní v křivočarých souřadnicích na malý křivohranný obdélník O , jehož hrany tvoří souřadnicové linie. Později opět tento obdélník limitně zmenšíme k nule, tj. do bodu, v němž rotaci počítáme:



Výsledkem je definice k -té složky rotace nezávislá na volbě souřadnicové soustavy:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{K})_k = \lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_k} \oint_{\gamma=\partial O} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}. \quad (359)$$

Rotace má význam plošné hustoty cirkulace pole elementárním obdélníkem. Omezíme se na výpočet první komponenty, pro kterou je obrázek připravený, u ostatních bychom postupovali obdobně, nebo využijeme cyklickou záměnu. Vzhledem k limitnímu zmenšování objemu můžeme tok pole nahradit součtem toků přes jednotlivé stěny obdélníku:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{K})_1 = \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_1} \sum_{k=1}^4 \mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{l}_k. \quad (360)$$

Výpočet je relativně přímočarý. Integrační křivku tvoří hranice obdélníku, orientovaná musí být v matematicky kladném smyslu (proti směru pohybu hodinových ručiček. Na příslušných hranách obdélníku se do cirkulace započítává jen složka orientovaná ve směru hrany, a to kladně, míří-li ve směru integrační křivky a záporně, míří-li naopak:

$$\begin{aligned}
 (\text{rot } \mathbf{K})_1 &= \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} \frac{1}{h_2 \Delta q_2 h_3 \Delta q_3} \left[\begin{array}{l} K_2(A)h_2(A)\Delta q_2 + K_3(B)h_3(B)\Delta q_3 - \\ -K_2(C)h_2(C)\Delta q_2 - K_3(D)h_3(D)\Delta q_3 \end{array} \right] = \\
 &= \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} \frac{1}{h_2 h_3} \left[\begin{array}{l} \frac{K_3(B)h_3(B) - K_3(D)h_3(D)}{\Delta q_2} - \\ - \frac{K_2(C)h_2(C) - (K_2(A)h_2(A))}{\Delta q_3} \end{array} \right] = \\
 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial h_3 K_3}{\partial q_2} - \frac{\partial h_2 K_2}{\partial q_3} \right].
 \end{aligned}$$

Obecný vztah pro všechny tři složky rotace tedy bude:

$$\begin{aligned}
 (\text{rot } \mathbf{K})_1 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial h_3 K_3}{\partial q_2} - \frac{\partial h_2 K_2}{\partial q_3} \right]; \\
 (\text{rot } \mathbf{K})_2 &= \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial h_1 K_1}{\partial q_3} - \frac{\partial h_3 K_3}{\partial q_1} \right]; \\
 (\text{rot } \mathbf{K})_3 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial h_2 K_2}{\partial q_1} - \frac{\partial h_1 K_1}{\partial q_2} \right].
 \end{aligned} \tag{361}$$

V kartézských, válcových a sférických souřadnicích máme

$$\begin{aligned}
 \text{kartézské} \quad \text{rot } \mathbf{K} &= \left(\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z}, \frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x}, \frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right); \\
 \text{válcové} \quad \text{rot } \mathbf{K} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial K_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial K_\varphi}{\partial z}, \frac{\partial K_r}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial K_r}{\partial \varphi} \right); \\
 \text{sférické} \quad \text{rot } \mathbf{K} &= \left(\begin{array}{l} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta K_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial K_\theta}{\partial \varphi}, \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial K_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_\varphi), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial K_r}{\partial \theta} \end{array} \right).
 \end{aligned} \tag{362}$$



8. BESSELOVY FUNKCE, KULOVÉ FUNKCE

Snadno si člověk přivykne Fourierově analýze – skládání nějakého signálu z kosinů a sinů určitých frekvencí. Takovou analýzu lze provést jak v časové, tak v prostorové oblasti, ale je poněkud nevhodná na válci, kde jsou přirozenější Besselovy funkce na sféře, kde jsou vhodné tzv. kulové funkce. V dnešní lekci si tyto funkce představíme, i když nebude možné jít do jednotlivých detailů. Ty si student musí dohledat ve specializované literatuře; tento text tedy chápejte jen jako elementární úvod do problematiky.

Kmity a vlny

Připomeňme si nejprve harmonický oscilátor, jehož energie má parabolický průběh, tj.

$$W_p = \frac{1}{2} \alpha y^2, \quad (363)$$

kde proměnná y má význam výchylky z rovnovážné polohy. Síla je záporně vzatým gradientem potenciální energie, což v našem jednorozměrném případě znamená, že je síla dána vztahem

$$F = -\frac{dW_p}{dy} = -\alpha y. \quad (364)$$

Síla je úměrná výchylce z rovnovážné polohy a má opačný směr. Snadno sestavíme pohybovou rovnici

$$m\ddot{y} = -\alpha y. \quad (365)$$

Tuto rovnici kmitů přepíšeme pro obecnou funkci ψ do tvaru

$$\blacktriangleright \quad \ddot{\psi} + \omega^2 \psi = 0; \quad \omega^2 \equiv \frac{\alpha}{m}. \quad (366)$$

Funkce ψ zastupuje libovolnou kmitající veličinu (výšku, teplotu v nějakém místě, tlak atd.). Řešení této rovnice kmitů lze zapsat jako lineární kombinaci kosinů a sinů nebo jako posunutý kosinus či sinus nebo jako lineární kombinaci kmitajících exponenciál:

$$\psi(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t), \quad (367)$$

$$\psi(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (368)$$

$$\psi(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}. \quad (369)$$

Povšimněte si, že argumenty všech funkcí jsou bezrozměrné a fáze kmitů (úhel ve funkcích kosinus a sinus) je lineární funkcí času

$$\varphi = \omega t; \quad (370)$$

$$\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (371)$$

Tato definice úhlové frekvence je zcela obecná, ve speciálním případě lineární závislosti a periodického řešení můžeme psát

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (372)$$

kde T je perioda kmitů. Jednotlivá vyjádření řešení (367) až (369) jsou na sebe navzájem převoditelná. Vyjádření (368) převedeme na (367) za pomoci vztahu pro kosinus součtu dvou úhlů a vyjádření (369) převedeme na (367) za pomoci Eulerova vztahu (24).

Hyperbolická řešení

Pokud bude mít druhý člen v rovnici kmitů (366) záporné znaménko, nebudou řešením kmity, ale hyperbolické funkce:

$$\ddot{\psi} - \omega^2 \psi = 0, \quad (373)$$

$$\psi(t) = a \operatorname{ch}(\omega t) + b \operatorname{sh}(\omega t), \quad (374)$$

$$\psi(t) = A_0 \operatorname{ch}(\omega t + \varphi_0), \quad (375)$$

$$\psi(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}. \quad (376)$$

Rozvlněný prostor

Obecné vlnění probíhá v čase i v prostoru. Pokud si stoupneme (umístíme přístroj) na konkrétní místo, budeme vnímat jen časový průběh vln v tomto místě, tedy kmity. Pokud naopak uděláme časový snímek vlnění (například fotografii rozvlněné hladiny), budeme mít informaci o prostorové části vlnění, ale nebudeme vědět, jak se případně vyvíjelo v čase. Prostorové kmity budou podléhat rovnici analogické (366):

$$\blacktriangleright \quad \psi'' + k^2 \psi = 0. \quad (377)$$

Její řešení lze opět zapsat více způsoby:

$$\psi(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx), \quad (378)$$

$$\psi(x) = A_0 \cos(kx + \varphi_0), \quad (379)$$

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}. \quad (380)$$

Důkaz, že všechna tři vyjádření znamenají totéž je stejně snadný jako v případě kmitů. Pokud bude mít druhý člen záporné znaménko, řešením budou opět hyperbolické funkce

$$\psi'' - k^2 \psi = 0. \quad (381)$$

$$\psi(x) = a \operatorname{ch}(kx) + b \operatorname{sh}(kx), \quad (382)$$

$$\psi(x) = A_0 \operatorname{ch}(kx + \varphi_0), \quad (383)$$

$$\psi(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}. \quad (384)$$

Pro fázi vlnění můžeme psát

$$\varphi = kx; \quad (385)$$

$$k = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (386)$$

Tato definice vlnového čísla k je opět zcela obecná, ve speciálním případě lineární závislosti a periodického řešení můžeme psát

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (387)$$

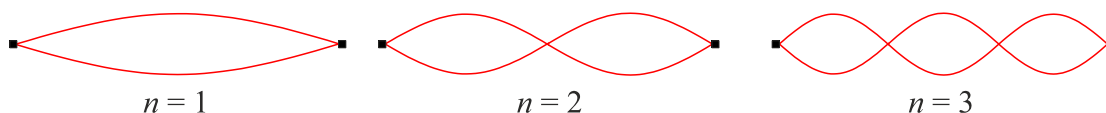
kde λ je vlnová délka sledovaných vln.

Neomezený a omezený definiční obor

Pokud kmity či vlny probíhají na neomezeném časovém či prostorovém intervalu, nemáme žádná omezení na úhlovou frekvenci ani vlnové číslo. Pokud ale kmit či vlna probíhají na konečném intervalu (ať časovém, či prostorovém), musíme na hranicích intervalu zadat dodatečné podmínky. Může jít třeba o strunu upevněnou na obou koncích, potom musí platit

$$\psi(b) = \psi(a) = 0 \quad (388)$$

a jen některé kmity vybraných vlnových délek jsou řešením:



U konečného intervalu jsou frekvence (pokud jde o časový průběh) či vlnové délky (pokud jde o prostorový průběh) diskrétní. Obecná vlnová řešení můžeme psát jako superpozici

$$\psi(x) = \sum_n A_n e^{ik_n x}; \quad x \in \langle a, b \rangle, \quad (389)$$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx} dk; \quad x \in R. \quad (390)$$

V prvním případě hovoříme o Fourierově řadě, v druhém o Fourierově transformaci. Amplitudy A_n resp $A(k)$ určují zastoupení odpovídajících vlnových délek. V časové oblasti je to obdobné, jen jde namísto vlnových čísel o frekvence:

$$\psi(t) = \sum_n A_n e^{i\omega_n t}; \quad t \in \langle t_a, t_b \rangle, \quad (391)$$

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad t \in R. \quad (392)$$

Situace ve třech dimenzích

Ve třech prostorových dimenzích bude mít obecná vlna tvar

$$\psi(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) e^{i\varphi(\mathbf{x})} \quad (393)$$

Prostorové změny fáze se nazývají vlnový vektor:

$$k_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad k_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad k_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (394)$$

souhrnně můžeme psát

$$\mathbf{k} = \nabla \varphi. \quad (395)$$

Nejjednodušší vlna bude mít konstantní amplitudu a lineární závislost fáze na vlnovém vektoru, tj.

$$\psi(\mathbf{x}) = A e^{i(c_x x + c_y y + c_z z)}. \quad (396)$$

Ze vztahu (394) je jasné, že koeficienty lineární kombinace nejsou ničím jiným než vlnovým vektorem, tj.

$$\psi(\mathbf{x}) = A e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (397)$$

Snadno nahlédneme, že taková funkce má jednoduchá pravidla pro derivování:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = i k_x \psi; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = i k_y \psi; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = i k_z \psi, \quad (398)$$

která lze formálně zapsat jako

$$\partial_x \rightarrow i k_x; \quad \partial_y \rightarrow i k_y; \quad \partial_z \rightarrow i k_z. \quad (399)$$

Druhé derivace splňují

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_x^2 \psi; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -k_y^2 \psi; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k_z^2 \psi. \quad (400)$$

Pokud tyto tři rovnice sečteme, dostaneme

$$\Delta \psi = -k^2 \psi; \quad k^2 \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \quad (401)$$

Po převedení obou členů nalevo máme přímé zobecnění rovnice (377) pro tři dimenze

$$\blacktriangleright \quad \Delta \psi + k^2 \psi = 0. \quad (402)$$

Na množině s konečným objemem (například kvádru) budou opět čísla k_x , k_y , k_z diskrétní, takže budeme mít sadu tří čísel n_1 , n_2 , n_3 , která definují vlastnosti dané vlny, tedy na každé hraně kvádru se může realizovat jiný počet kmiten a uzlů.

Rozhraní

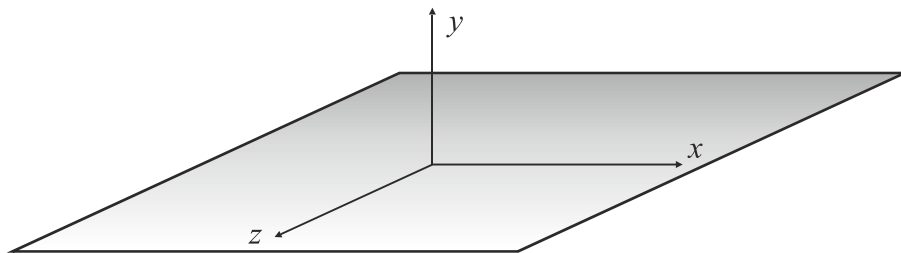
Periodické řešení ve tvaru $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ může fungovat jen ve směrech, kde není vlna nijak omezo-
vána. Pokud se bude například vlna šířit prostorem s rozhraním v rovině $y = 0$, můžeme pro
parciální Fourierovu komponentu psát

$$\psi(\mathbf{x}) = f(y) e^{ik_x x + ik_z z}. \quad (403)$$

Vlna se nyní skládá ze dvou částí: dokonale periodické, která je obsažena v kmitavé expo-
nenciále a funkce $f(y)$, kterou musíme hledat jako řešení příslušné vlnové rovnice. Periodická
část povede na algebraické vztahy, $f(y)$ na diferenciální rovnici, kterou je třeba řešit. Obecné
řešení můžeme opět chápat jako superpozici parciálních vln, což povede na sadu pravidel pro
příslušnou Fourierovu transformaci:

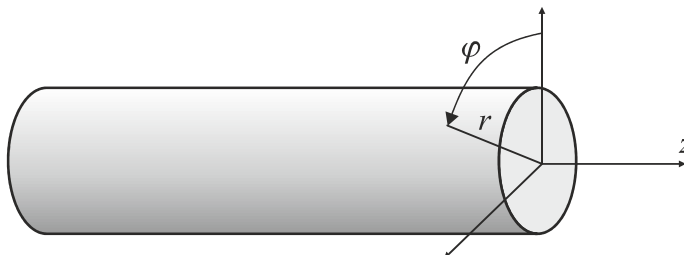
$$\partial_x \rightarrow ik_x; \quad \partial_y \rightarrow d/dy; \quad \partial_z \rightarrow ik_z. \quad (404)$$

Jedinou změnou je tedy to, že v proměnné y derivace zůstane. Stane se však obyčejnou deri-
vací, protože po aplikaci pravidel již ve výrazech žádná jiná proměnná než y nezůstane.



Válcové rozhraní

Předpokládejme nyní válec z nějaké látky, která se může vlnit obklopený nějakým jiným pro-
středím. Předpokládáme dokonalou symetrii ve směru osy válce i ve směru azimutu.



U hledaného řešení bude amplituda funkcí radiální vzdálenosti od osy vlákna. Příslušná periodicitu v radiálním směru bude modifikována válcovou geometrií, ať už rozhraní existuje, či nikoli.

$$\psi(r, \varphi, z) = f(r) e^{ik_\varphi \varphi + ik_z z}. \quad (405)$$

Řešení musí splňovat periodicitu v azimutálním úhlu φ :

$$\psi(r, \varphi + 2\pi, z) = \psi(r, \varphi, z). \quad (406)$$

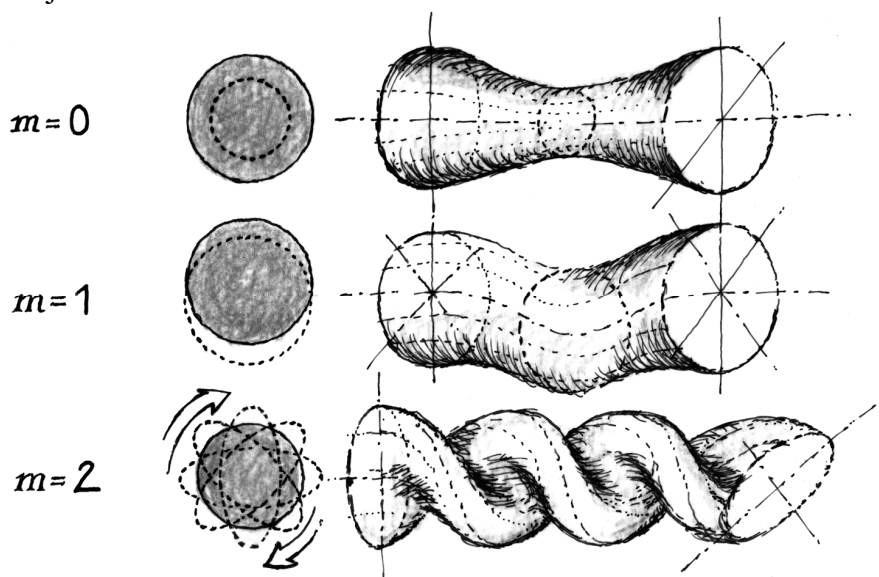
Tuto podmínku splníme, pokud platí

$$e^{ik_\varphi \varphi} = e^{ik_\varphi (\varphi + 2\pi)} \Rightarrow e^{2\pi i k_\varphi} = 1 \Rightarrow k_\varphi = m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Číslo m nazýváme řád (mód) poruchy resp. nestability a výraz (405) získá tvar

$$\blacktriangleright \quad \psi(r, \varphi, z) = f(r) e^{im\varphi + ik_z z}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad k_z \in R. \quad (407)$$

Proměnná r zůstane v rovnicích včetně svých derivací. První tři módy poruchy jsou znázorněny na následujícím obrázku



Besselovy funkce

Řešme nyní rovnici (402) ve válcových souřadnicích v řezu vlákem, tj. pro $z = \text{const}$, například $z = 0$. Laplaceův operátor vyjádříme ve válcových souřadnicích a ponecháme části týkající se proměnných r a φ :

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0, \quad (408)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi = 0.$$

Po dosazení předpokládaného tvaru řešení $\psi(r, \varphi) = f(r) \exp[i m \varphi]$ a provedení derivace podle azimutálního úhlu máme rovnici pro neznámou funkci $f(r)$, která popisuje rozvlnění v radiálním směru:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) f = 0. \quad (409)$$

Červeně označené členy jsou důsledkem válcové geometrie. Pokud bychom je smazali, dostali bychom rovnici vln typu (377). Rovnici vynásobíme druhou mocninou r

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} + (k^2 r^2 - m^2) f = 0. \quad (410)$$

a provedeme substituci

$$x = kr \quad (411)$$

$$\blacktriangleright \quad x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} + (x^2 - m^2) f = 0. \quad (412)$$

Nezapomeňme, že proměnná x nemá nic společného s kartézskou proměnnou x , jde o přeškálovanou radiální vzdálenost od osy válcových souřadnic. Uvedená rovnice se nazývá Besselova rovnice a její řešení je analogií kosinů a sinů v kartézské geometrii. Rovnici je třeba řešit za pomoci rozvoje do nekonečných řad. Obecné řešení má tvar

$$\blacktriangleright \quad f(x) = c_1 J_m(x) + c_2 Y_m(x). \quad (413)$$

Funkce J_m nazýváme Besselovy funkce prvního druhu a mají v počátku konečné hodnoty. Funkce Y_m nazýváme Besselovy funkce druhého druhu a v počátku jsou singulární (v limitě se blíží k minus nekonečnu), což je důsledkem singulárních členů v (409). Funkce $J_0(x)$ koresponduje ve válcových souřadnicích s funkcí kosinus z kartézských souřadnic a funkce $J_1(x)$ koresponduje se sinem. Platí mezi nimi i obdobný vztah:

$$\blacktriangleright \quad \frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x). \quad (414)$$

Funkce prvního druhu lze jednoduše zapsat pomocí řady, pro druhý druh je přehlednější integrální vyjádření:

$$\blacktriangleright \quad J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}, \quad (415)$$

$$\blacktriangleright \quad Y_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[e^{mt} + (-1)^m e^{-mt} \right] e^{-x \operatorname{sh} t} dt. \quad (416)$$

Analogie hyperbolického řešení

Besselovy funkce lze bez problémů definovat i pro neceločíselný index m (faktoriály v definiční řadě nahradí Γ funkce) nebo pro komplexní argument. Z komplexních argumentů je nejdůležitější ryze imaginární argument ($x \rightarrow ix$). V tomto případě rovnice (412) přejde v

$$\blacktriangleright \quad x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} - (x^2 + m^2) f = 0. \quad (417)$$

jejímž řešením je analogie hyperbolických funkcí

$$\blacktriangleright \quad f(x) = c_1 I_m(x) + c_2 K_m(x), \quad (418)$$

kde I_m , K_m nazýváme hyperbolické neboli modifikované Besselovy funkce. Funkce I_m mají konečné hodnoty v počátku a v nekonečnu divergují (analogicky jako $\exp[x]$), snadno se definují pomocí řady. Naopak funkce K_m divergují v počátku a v nekonečnu se blíží nule (analogicky jako $\exp[-x]$) a jednodušší je jejich integrální vyjádření:

$$\blacktriangleright \quad I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}, \quad (419)$$

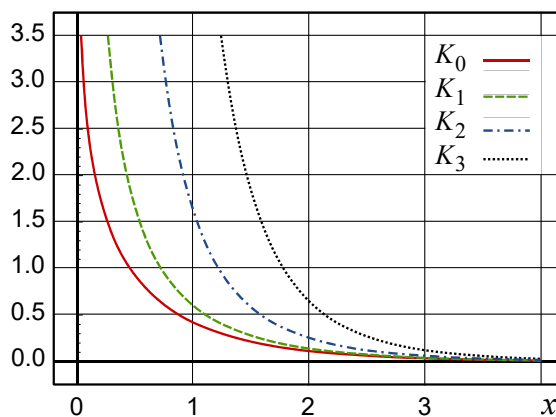
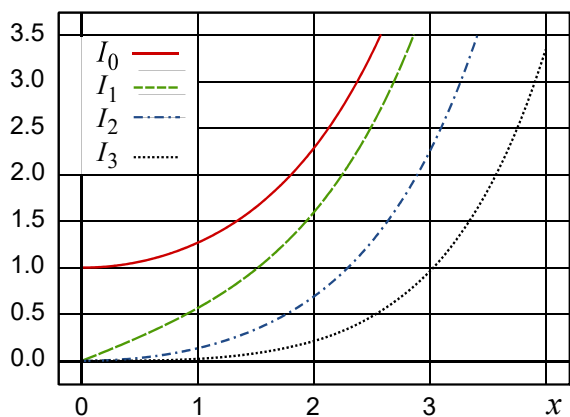
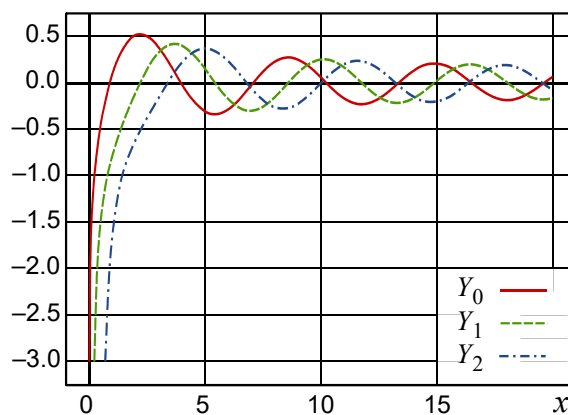
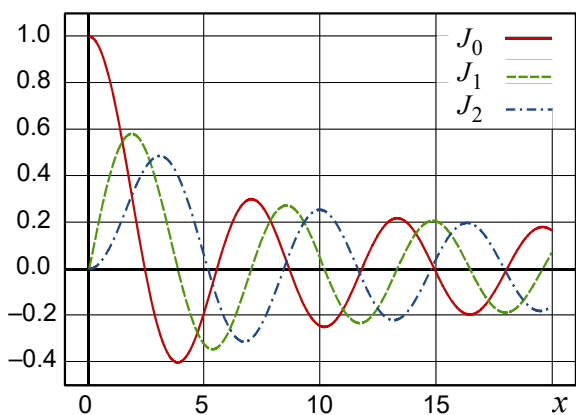
$$\blacktriangleright \quad K_m(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(m-1/2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \int_1^{\infty} e^{-tx} (t^2 - 1)^{m-1/2} dt \quad (420)$$

Užitečné mohou být asymptotické vztahy v okolí počátku ($x \ll 1$):

$$\begin{aligned}
 J_m(x) &\approx \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m, \\
 Y_m(x) &\approx \frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}; \quad m > 0, \\
 I_m(x) &\approx \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m, \\
 K_m(x) &\approx \frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}; \quad m > 0.
 \end{aligned}
 \tag{421}$$

Někdy se také hodí asymptotické vztahy v nekonečnu ($x \gg 1$):

$$\begin{aligned}
 J_m(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\
 Y_m(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\
 I_m(x) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \\
 K_m(x) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}.
 \end{aligned}
 \tag{422}$$



Chceme-li vykreslit Besselovy funkce, můžeme použít stránku www.wolframalpha.com, příkazy jsou samonaváděcí, například `besselj[0,x] from x=0 to x=10` vykreslí funkci J_0 . první

argument v závorce (nezáleží na tom, o jaký druh závorky jde) je číslo m , jednotlivé Besselovy funkce se nazývají *besselj*, *bessely*, *besseli* a *besselk*.

● **Příklad:** helikální magnetické pole

Předpokládejme, že se po dosti dlouhé době se ve válcovém sloupci plazmatu nastolí stav s minimem energie v magnetickém poli. Potom je magnetické pole nutně helikální a splňuje Beltramovu podmínku

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} \quad (423)$$

Beltramovu podmínku rozepíšeme ve válcových souřadnicích po složkách:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}, \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right) = \alpha (B_r, B_\varphi, B_z) \quad (424)$$

Ve válcové symetrii budou všechny složky pouze funkcí radiální proměnné, což vede na tři jednoduché rovnice

$$0 = \alpha B_r, \quad (425)$$

$$-\frac{dB_z}{dr} = \alpha B_\varphi, \quad (426)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\varphi) = \alpha B_z. \quad (427)$$

Radiální složka helikálního pole je nulová. Po dosazení za pole B_φ z druhé do třetí rovnice dostaneme rovnici

$$\frac{d^2 B_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_z}{dr} + \alpha^2 B_z = 0.$$

Rovnici vynásobíme r^2 a provedeme substituci $x = \alpha r$, výsledkem je Besselova rovnice

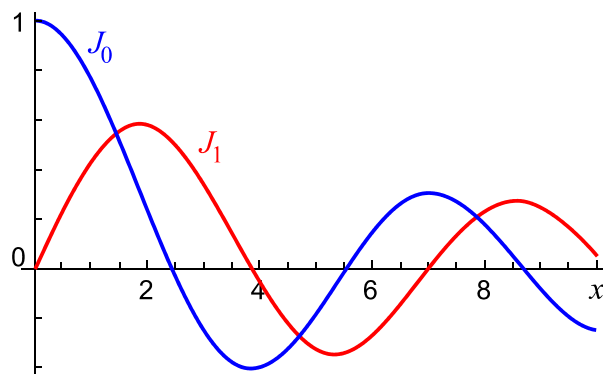
$$x^2 \frac{d^2 B_z}{dx^2} + x \frac{dB_z}{dx} + x^2 B_z = 0, \quad (428)$$

v níž je $m = 0$ a která má řešení

$$B_z(r) = B_0 J_0(\alpha r), \quad (429)$$

Besselova funkce $Y_0(x)$ nedává vzhledem k divergenci na ose smysluplné fyzikální řešení. Druhou složku pole snadno určíme ze vztahu (426), při derivování využijeme vztah (414):

$$B_\varphi(r) = B_0 J_1(\alpha r). \quad (430)$$



Besselova funkce J_0 mění znaménko v argumentu 2,4. Pokud má plazmový sloupec dosti velký poloměr, nutně dojde pro $r > 2,4/\alpha$ k obrácení směru pole B_z . Vzniklý útvar nazýváme reverzní pinč. ■

Kulové funkce

Kulové funkce dostaneme řešením úlohy vlastních čísel Laplaceova operátoru ve sférické symetrii pro řez $r = \text{const}$, tedy na obecné sféře. Výchozí rovnice má opět tvar (402), tj. ve sférických souřadnicích

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad (431)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi = 0,$$

kde r je vzdálenost od středu, θ je odklon od polární osy a φ je azimutální úhel. Hodnota $-k^2$ má význam vlastního čísla Laplaceova operátoru. Pro fixní r zůstane jen úhlová část Laplaceova operátoru, vlastní číslo přeskálujeme a označíme obvyklým symbolem λ :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \lambda \psi. \quad (432)$$

Řešení budeme opět hledat ve tvaru

$$\psi(\theta, \varphi) = f(\theta) e^{im\varphi}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (433)$$

neboť je situace opět symetrická v azimutálním úhlu φ , kde platí periodičita 2π . Po dosazení do rovnice (432) dostaneme

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) f = 0. \quad (434)$$

Výsledkem je obyčejná diferenciální rovnice pro funkci $f(\theta)$, která se řeší standardními matematickými postupy. Výsledkem jsou polynomiální funkce v $\cos \theta$ a $\sin \theta$, které se nazývají přidružené Legendreovy polynomy $P_{lm}(\cos \theta)$ a jsou definované vztahem

$$\blacktriangleright P_{lm}(x) \equiv \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l; \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad |m| \leq l; \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (435)$$

Příslušné vlastní číslo je

$$\blacktriangleright \lambda_l = l(l+1). \quad (436)$$

Celá úhlová část řešení se nazývá kulová funkce a označuje se

$$\blacktriangleright Y_{lm}(\varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_{lm}(\cos \theta). \quad (437)$$

Uveďme příklady některých kulových funkcí:

$$Y_{00} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}};$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta; \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta; \quad Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\varphi} \sin \theta; \quad (438)$$

$$Y_{20} = -\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (1-3\cos^2 \theta); \quad Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\varphi} \cos \theta \sin \theta \dots$$

Pro $m = 0$ se tyto polynomy nazývají Legendreovy polynomy.

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l; \quad l = 0, 1, 2, \quad (439)$$

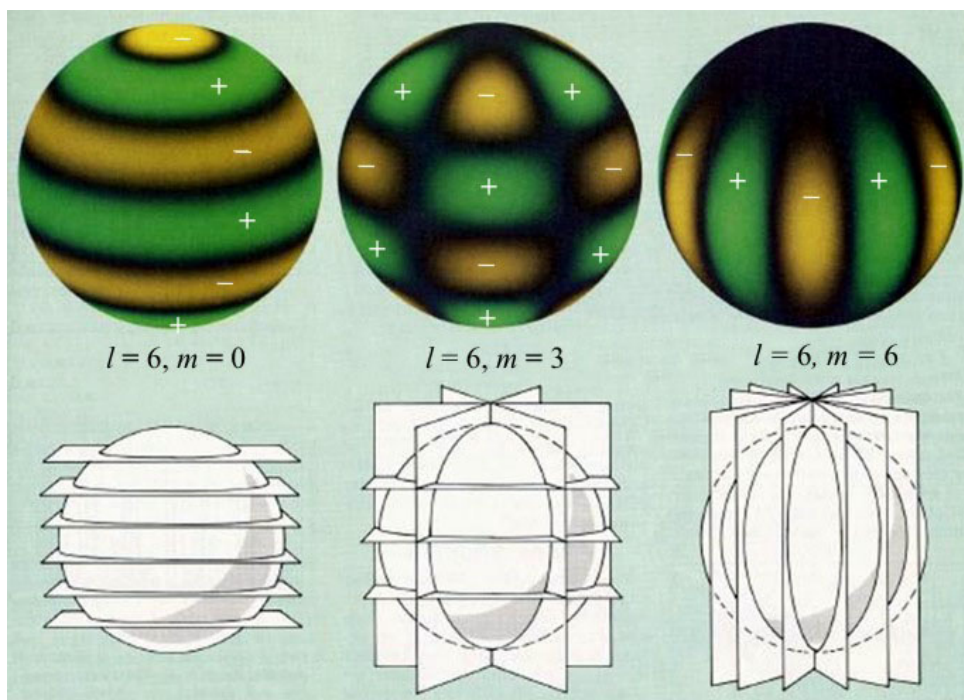
Ve wolframalpha.com je označení pro sférické funkce `sphericalharmonic(l,m)`, kde za l a m dosadíte konkrétní čísla. Do kulových funkcí se provádí rozvoj jakýchkoli dat na sféře, například je využívá helioseismologie (popis vln ve Slunci) nebo frekvenční analýza reliktního záření. Legendreovy polynomy lze použít při multipólovém rozvoji, kdy se při rozvoji potenciálu pro převrácenou hodnotu vzdálenosti využívá vztah

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\min^l(r,r')}{\max^{l+1}(r,r')} P_l(\cos\theta). \quad (440)$$

V případě, že je vlna rozvinuta i v radiálním směru, potřebujeme k popisu vlnění tři čísla: m popisuje mody v azimutálním směru, l v polárním směru a n v radiálním směru. Pro $l=0$ je řešení na sféře konstantní a žádné vlny se v úhlových stupních volnosti nerozvinou. Pro $l > 1$ je typický rozměr vln

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{l}; \quad l > 1. \quad (441)$$

Cílem této kapitoly bylo zevrubné seznámení s existencí Besselových a kulových funkcí, nikoli detaily jejich výpočtu. Na závěr si prohlédněte vlny na sféře pro některá l a m . Zelená barva (+) znamená vyboulení sféry ven a žlutá (-) její prohnutí dovnitř.



9. ZOBECNĚNÉ FUNKCE

Ve fyzice se velmi často setkáváme s nutností popsat bodový náboj nebo hmotný bod. Náboj či hmotnost částice si představujeme lokalizované v jediném místě, což s sebou nese problém nekonečné hustoty náboje či hmoty v tomto místě. Řešením je zavedení tzv. zobecněných funkcí, zejména Diracovy distribuce. Ukažme si problém na lineární hustotě náboje lokalizovaného v místě $x = 0$:

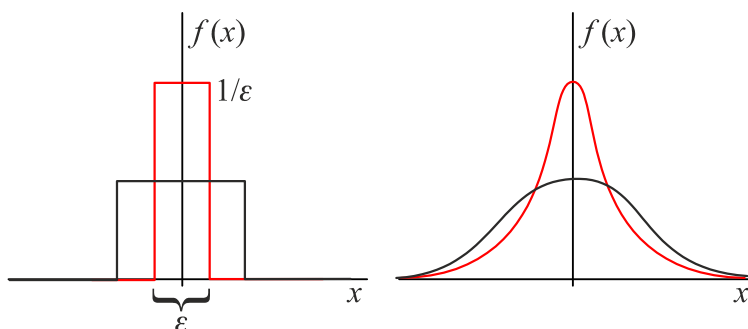
$$\tau(x) = \begin{cases} 0; & x \neq 0 \\ \neq 0 & x = 0. \end{cases} \quad (442)$$

Integrál z hustoty ale musí dát celkový náboj Q :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau(x) dx = Q. \quad (443)$$

Je jasné, že hustota náboje není „normální“ funkcí. Má nenulovou hodnotu v jediném bodě, a integrál z ní by přesto měl dát konečné číslo. Takové funkce ale neexistují, můžeme je zavádět jako limitu posloupností funkcí a jejich význam je jen ve skalárním součinu s jinou, tzv. testovací funkcí.

Diracova distribuce



Posloupnost obdélníků

Zavedme si obdélníkové funkce

$$f_\epsilon(x) \equiv \begin{cases} 1/\epsilon, & x \in \langle -\epsilon/2, \epsilon/2 \rangle; \\ 0, & x \notin \langle -\epsilon/2, \epsilon/2 \rangle. \end{cases} \quad (444)$$

Všechny obdélníky mají stejnou plochu rovnou jedné a funkce f_ϵ mají zajímavé vlastnosti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(x) dx = 1; \quad f_\epsilon(0) = \frac{1}{\epsilon}; \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = \begin{cases} \infty & \text{pro } x = 0 \\ 0 & \text{pro } x \neq 0 \end{cases}. \quad (445)$$

Diracovu distribuci můžeme formálně zavést jako limitu těchto obdélníkových funkcí

$$\blacktriangleright \quad \delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = \begin{cases} \infty & \text{pro } x = 0 \\ 0 & \text{pro } x \neq 0 \end{cases}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (446)$$

Je jasné, že nemůže jít o skutečnou funkci, protože integrál z funkce nemůže ovlivnit hodnota v jediném bodě. Hovoříme o tzv. zobecněné funkci a skutečný význam si vysvětlíme později.

Posloupnost kopečků (Cauchyových-Lorentzových rozdělení)

Obdélníky z předchozí ukázky nejsou hladké funkce. To ale není nepřekonatelný problém, místo obdélníků můžeme použít funkce spojitě se všemi svými derivacemi podle vztahu

$$f_\varepsilon(x) \equiv \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}. \quad (447)$$

Plocha pod těmito funkcemi je rovna jedné pro každé ε , protože

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} dx = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{atan} \frac{x}{\varepsilon} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1. \quad (448)$$

Pro malá ε se „kopce“ zužují a přitom se zvětšuje jejich výška:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x) dx = 1; \quad f_\varepsilon(0) = \frac{1}{\pi\varepsilon}; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \infty & \text{pro } x = 0 \\ 0 & \text{pro } x \neq 0 \end{cases}. \quad (449)$$

Opět můžeme zavést Diracovu distribuci jako limitu těchto spojitých funkcí:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x). \quad (450)$$

Cauchy-Lorentzovo rozdělení, ze kterého jsme nyní zkonstruovali Diracovu distribuci, popisuje ve spektroskopii tvar spektrálních čar a nebo v teorii vynucených kmitů rezonanční křivku. Je pojmenováno podle francouzského matematika Augustina Cauchyho (1759–1857) a holandského fyzika Hendrika Lorentze (1853–1928).

Diracova distribuce (neboli *zobecněná funkce*) nemá vlastnosti běžných funkcí. Přestože je její hodnota nenulová v jediném bodě, dá integrál z ní nenulovou hodnotu. To plyne z limitního charakteru zavedení této distribuce. K jejím základním vlastnostem patří:

$$\blacktriangleright \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(0) dx = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = f(0). \quad (451)$$

Důvod je snad zřejmý. Distribuce δ je všude nulová kromě jediného bodu $x=0$. Proto výsledek integrálu může ovlivnit jedině hodnota funkce f v počátku. Tu však můžeme vytknout před integrál a dostaneme jako výsledek hodnotu funkce v počátku.

Temperované distribuce

Diracovu distribuci lze také chápat jako velmi jednoduché zobrazení, které přiřadí funkci její hodnotu v počátku (zobrazení, které přiřadí funkci číslo, se nazývá *funkcionál*).

$$\hat{T}_\delta f(x) \equiv f(0); \quad \text{resp. } f(x) \xrightarrow{T_\delta} f(0). \quad (452)$$

Taková definice nemá žádné problémy s nekonečny v počátku ani s integrálem, v němž má „funkce“ jedinou hodnotu, a je zcela korektní. Obecně lze distribuci chápat jako funkcionál daný skalárním součinem

$$\hat{T}_g f(x) \equiv \langle g | f \rangle; \quad (453)$$

Skalární součin působí na libovolnou funkci f z tzv. prostoru testovacích funkcí. Funkce g je pevně daná, definuje toto zobrazení a nazývá se *temperovaná distribuce*. Čím hezčí vlastnosti budou mít funkce z testovacího prostoru (například budou dostatečně rychle konvergovat k nule na hranicích oblasti), tím horší vlastnosti může mít funkce g definující zobrazení. Za prostor testovacích funkcí může posloužit například *Schwartzův* (*Sobolevův*) prostor \mathcal{S} funkcí, které splňují:

- 1) funkce jsou nekonečně diferencovatelné, tj. třídy C^∞ ;
- 2) funkce klesají v $\pm\infty$ rychleji než libovolná mocnina $1/|x|^k$.

Testovací funkce budeme nadále označovat ψ , tj.

$$\blacktriangleright \hat{T}_g \psi(x) \equiv \langle g | \psi \rangle; \quad \psi \in \mathcal{S}. \quad (454)$$

Často se hledají řešení celých rovnic „ve smyslu skalárního součinu“. Například místo Laplaceovy Poissonovy rovnice

$$\Delta \phi = f,$$

řešíme rovnici

$$\langle \Delta \phi | \psi \rangle = \langle f | \psi \rangle,$$

kde ϕ je hledané řešení a ψ je libovolná funkce z prostoru testovacích funkcí. Tato řešení se nazývají *řešení ve smyslu distribucí* neboli *slabá řešení*. Jejich třída je mnohem bohatší, než byla třída řešení původní rovnice. Nacházená řešení mohou mít „divočejší“ charakter a jsou bližší fyzikální realitě. Jejich hledáním se jako jedna z prvních zabývala vynikající sovětská a ruská matematicka Olga Alexandrovna Ladyženská (1922–2004).

Posloupnost Dirichletových jader

Diracovu distribuci můžeme zavést také pomocí jednoduché funkce

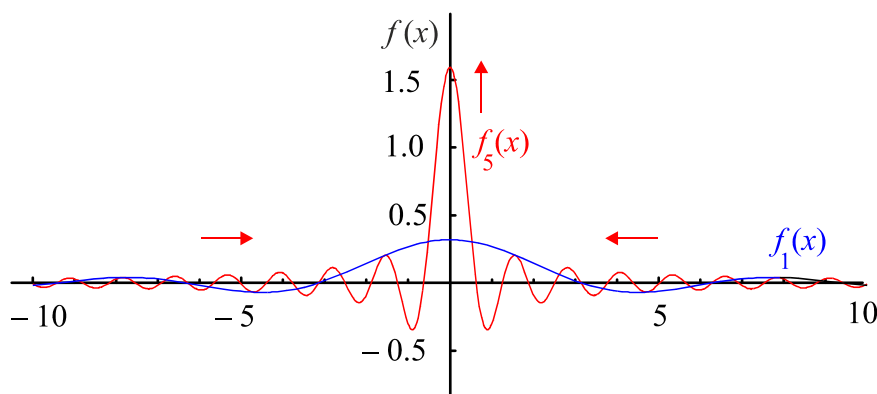
$$f(x) \equiv \frac{\sin x}{x}; \quad f(0) \rightarrow 1; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi. \quad (455)$$

Zavedme posloupnost

$$f_k(x) = \frac{k}{\pi} \frac{\sin kx}{kx}, \quad (456)$$

která má jednoduché vlastnosti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) dx = 1; \quad f_k(0) = \frac{k}{\pi}; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(0) = \infty. \quad (457)$$



Bohužel už neplatí, že by se pro $k \rightarrow \infty$ funkční hodnoty pro $x \neq 0$ blížily k nule, jako tomu bylo u posloupnosti obdélníků nebo u posloupnosti „kopečků“ pro malá epsilon. Například pro $x = \pi/2$ je $f_k(x) \sim \sin(k\pi/2) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$ a limita vůbec neexistuje. Nicméně na každém intervalu, který neobsahuje nulu, bude integrál z této rychle kmitající funkce pro $k \rightarrow \infty$ nulový, a tato posloupnost funkcí je opět vhodná pro realizaci Diracovy distribuce (integrál každé z nich je roven jedné a v nule pro $k \rightarrow \infty$ posloupnost diverguje k nekonečnu). Diracovu tedy distribuci můžeme zavést jako limitu

$$\blacktriangleright \delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \frac{\sin kx}{kx}. \quad (458)$$

Tuto limitu ale chápeme jako limitu posloupnosti distribucí (při integraci přes testovací funkci nebude neexistence některých limit podstatná). Poznamenejme, že funkce $f_k(x)$ jsou známé z důkazu věty o Fourierově rozvoji do řady a nazývají se *Dirichletovo jádro*. Je pojmenováno podle známého německého matematika Johanna Petera Gustava Lejeunea Dirichleta (1805–1859).

Diracova distribuce jako Fourierův obraz jednotkové funkce

Počtěme nejprve následující integrál:

$$\int_{-k}^{+k} e^{ikx} dk = \left[\frac{1}{ix} e^{ikx} \right]_{-k}^{+k} = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{ix} = 2k \frac{\sin kx}{kx}. \quad (459)$$

Integrál až na koeficient $\pi/2$ dává Dirichletovo jádro. Pro Diracovu distribuci lze tedy psát

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^{+k} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk.$$

Integrál v nevlastních mezích chápeme právě ve smyslu uvedené limity. Diracova distribuce je tak úměrná Fourierovu obrazu jednotkové funkce:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk. \quad (460)$$

Greenova funkce

Konvoluce

Již dříve jsme si ukázali, že přímým zobecněním maticového násobení je konvoluce. Pro zobrazení dané maticovým násobením platí (prvku f přiřadíme prvek g)

$$\mathbf{g} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}; \quad (461)$$

$$g_k = \sum_l A_{kl} f_l.$$

Jednotkové zobrazení je dáno jednotkovou maticí, jejíž prvky tvoří Kroneckerův symbol:

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{f}; \quad (462)$$

$$\sum_l \delta_{kl} f_l = f_k.$$

V případě prostoru funkcí je zobrazení dáno namísto maticí konvolučním jádrem $A(x, y)$:

$$A^* f = g; \quad (463)$$

$$\int_{\Omega} A(x, y) f(y) dy = g(x).$$

Integrál (463) se nazývá *konvoluce*. Konvoluce je analogií maticového násobení na prostorech funkcí. Roli indexů přebírají spojité proměnné x a y . Roli matice přebírá *jádro konvoluce*. Speciálním případem konvolucí jsou různé integrální transformace (Laplaceova, Fourierova, Abelova atd.). Jádrem jednotkového operátoru je Diracova distribuce (je nulová jen pro $x = y$):

$$\int \delta(x - y) f(y) dy = f(x)$$

Diracova distribuce přebírá úlohu Kroneckerova symbolu a je na prostoru funkcí jednotkovým operátorem. Diracovu distribuci pro konvoluci můžeme vyjádřit ze vztahu (460):

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_k e^{ik(x-y)} dk. \quad (464)$$

V N dimenzích je vztah obdobný:

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d^N \mathbf{k}. \quad (465)$$

Fourierova transformace

Fourierovu transformaci můžeme chápat jako konvoluci s jádrem $\exp[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}]$ nebo jako rozvoj funkce do rovinných vln:

$$\blacktriangleright \quad F(\mathbf{x}) \equiv \int A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^N \mathbf{k}; \quad (466)$$

Koeficienty rozvoje neboli amplitudy $A(\mathbf{k})$ určují, jak moc je která vlna ve spektru zastoupena. V některých situacích se hodí vztah, který nám říká, jak určit koeficienty Fourierova rozvoje funkce $F(\mathbf{x})$:

$$\blacktriangleright \quad A(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int F(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^N \mathbf{x}. \quad (467)$$

Dokažme nyní, že takto určené amplitudy vedou na správný rozvoj funkce $F(\mathbf{x})$. Za tím účelem dosadíme (467) do pravé strany (466):

$$\begin{aligned} \int A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^N \mathbf{k} &= \int \left(\frac{1}{(2\pi)^N} \int F(\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d^N \mathbf{x}' \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^N \mathbf{k} = \\ &= \int F(\mathbf{x}') \left(\frac{1}{(2\pi)^N} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} d^N \mathbf{k} \right) d^N \mathbf{x}' = \\ &= \int F(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') d^N \mathbf{x}' = F(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat – po dosazení amplitudy (467) do pravé strany (466) dostaneme původní funkci. Koeficienty rozvoje $A(\mathbf{k})$ zpravidla interpretujeme jako přímou transformaci z \mathbf{x} prostoru do \mathbf{k} prostoru, vztah (466) jako inverzní transformaci z \mathbf{k} prostoru do \mathbf{x} prostoru:

$$A(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{F}(F(\mathbf{x})); \quad F(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{F}^{-1}(A(\mathbf{k})). \quad (468)$$

Součin koeficientů u přímé a inverzní transformace musí dát $1/(2\pi)^N$. Někdy bývá zvykem koeficienty u přímé a inverzní transformace volit symetricky:

$$F(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^N \mathbf{k}; \quad (469)$$

$$A(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int F(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^N \mathbf{x}. \quad (470)$$

Greenova funkce

Zabývejme se nyní speciálním případem – rovnicí s lineárním operátorem a nenulovou pravou stranou na prostoru L^2

$$\hat{L}\phi = f. \quad (471)$$

Hledejme nejprve řešení pro jednotkový impuls na pravé straně (bude reprezentovaný Diracovou distribucí):

$$\hat{L}G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \quad (472)$$

Toto řešení se nazývá *Greenova funkce*. Obecné řešení rovnice (471) je konvolucí Greenovy funkce a pravé strany rovnice

$$\blacktriangleright \quad \phi(\mathbf{x}) = G * f = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y})d^N \mathbf{y} . \quad (473)$$

Důkaz je velmi jednoduchý. Ukážeme, že působením operátoru \hat{L} na nalezené řešení dostaneme pravou stranu původní rovnice:

$$\hat{L}\phi(\mathbf{x}) = \int \hat{L}G(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y})d^N \mathbf{y} = \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y})d^N \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) .$$

Greenova funkce je velmi výhodná při řešení parciálních diferenciálních rovnic. Do Greenovy funkce jsou zahrnuty případné okrajové podmínky, ty musí Greenova funkce samozřejmě automaticky splňovat. Pokud má parciální diferenciální rovnice i časovou proměnnou, tj. $\phi = \phi(t, \mathbf{x})$, musíme zadat počáteční podmínku $\phi_0(\mathbf{x}) = \phi(t = 0, \mathbf{x})$, okrajové podmínky a případnou pravou stranu $f(t, \mathbf{x})$. Obecné řešení je pak součtem dvou členů: prostorové konvoluce Greenovy funkce s počáteční podmínkou a časoprostorové konvoluce Greenovy funkce s pravou stranou:

$$\blacktriangleright \quad \phi(t, \mathbf{x}) = G_{(\mathbf{x})} * \phi_0 + G_{(t, \mathbf{x})} * f , \quad (474)$$

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int G(t, \mathbf{x} - \mathbf{y})\phi_0(\mathbf{y})d^N \mathbf{y} + \int G(t - \tau, \mathbf{x} - \mathbf{y})f(\tau, \mathbf{y})d\tau d^N \mathbf{y} . \quad (475)$$

V poslední části této kapitoly si ukážeme využití Greenovy funkce při výpočtu obecného řešení rovnice difúze v neomezeném třírozměrném prostoru.

Příklad: řešení rovnice difúze na \mathbf{R}^3

Rovnice difúze je jednou z nejdůležitějších fyzikálních rovnic vůbec. Vede na ni řada problémů: difúze molekul (například voňavky) ze zdroje do okolního prostředí (proměnnou je zde koncentrace), vedení tepla, difúze magnetického pole, ale i Schrödingerova časová rovnice má obdobný tvar. Vyjděme z tvaru:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = D \Delta \phi \quad (476)$$

a předpokládejme, že veličina ϕ má význam koncentrace látky, která difunduje do okolí s koeficientem difúze D . Počáteční rozložení látky (například vůně) je

$$\phi(t = 0, \mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) \quad (477)$$

Rovnice difúze je lineární rovnicí, a proto můžeme hledat řešení jako superpozici Fourierových modů

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \phi_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})d^3 \mathbf{k} = \int A_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}d^3 \mathbf{k} . \quad (478)$$

Každý z Fourierových modů $\phi_{\mathbf{k}}$ musí splňovat rovnici difúze:

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{k}}}{\partial t} = D \Delta \phi_{\mathbf{k}} , \quad (479)$$

$$\frac{\partial (A_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}})}{\partial t} = D \Delta (A_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}) . \quad (480)$$

Po provedení obou derivací máme:

$$\frac{dA_{\mathbf{k}}}{dt} = -Dk^2 A_{\mathbf{k}}, \quad (481)$$

$$A_{\mathbf{k}}(t) = A_{\mathbf{k}}(0) e^{-Dk^2 t}. \quad (482)$$

Celkové řešení tedy napíšeme ve tvaru

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int A_{\mathbf{k}}(0) e^{-Dk^2 t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k}. \quad (483)$$

Dosadíme-li $t = 0$ a provedeme inverzní transformaci, získáme vztah pro počáteční hodnoty

$$A_{\mathbf{k}}(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \phi(0, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x}. \quad (484)$$

Povšimněte si vztahu (483). Každá Fourierova komponenta $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$ se v čase tlumí faktorem $\exp(-Dk^2 t)$. Tedy fluktuační malé rozměry (velkých k) jsou utlumeny mnohem rychleji než fluktuační velké rozměry. To je pro difúzi charakteristické, difúzi zanikají nejprve drobné nepravidelnosti. Najdeme nyní Greenovu funkci pro rovnici difúze v neomezeném prostředí, tj. za počáteční impuls budeme volit Diracovu distribuci lokalizovanou v bodě \mathbf{x}' :

$$\phi_0(\mathbf{x}) = \phi(0, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \quad (485)$$

Diracův impuls postupně dosadíme do (484) a (483), výsledné řešení bude Greenova funkce problému:

$$A_{\mathbf{k}}(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}; \quad (486)$$

$$\phi(t, \mathbf{x}) = G(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-Dk^2 t} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} d^3\mathbf{k}. \quad (487)$$

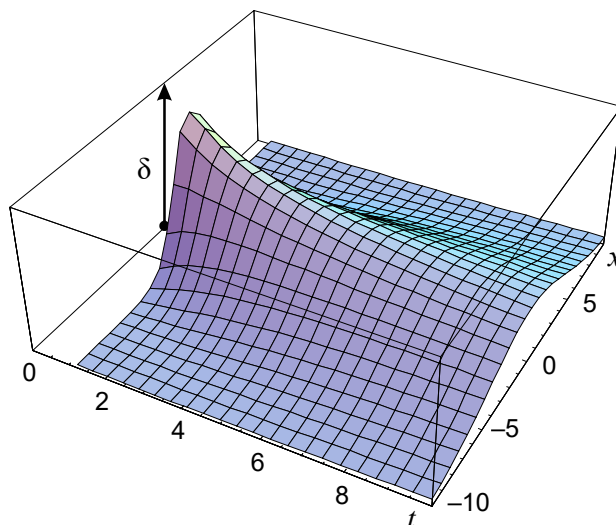
Jde o obecný zápis Greenovy funkce pro rovnici difúze. Výsledek integrace samozřejmě závisí na okrajových podmínkách a volbě souřadnicové soustavy. Provedme integraci v jednoduchém případě neomezeného prostředí popisovaného v kartézské souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} G(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-Dk^2 t} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} d^3\mathbf{k} = \quad / \mathbf{x} - \mathbf{x}' \equiv \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-Dk^2 t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}} d^3\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-Dk^2 t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}} d^3\mathbf{k} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp\left[-Dt\left(\mathbf{k}^2 - \frac{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}{Dt}\right)\right] d^3\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \exp\left[-Dt\left(\mathbf{k} - \frac{i\mathbf{a}}{2Dt}\right)^2 - \frac{\mathbf{a}^2}{4Dt}\right] d^3\mathbf{k} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-\frac{\mathbf{a}^2}{4Dt}} \int_{R^3} \exp\left[-Dt\left(\mathbf{k} - \frac{i\mathbf{a}}{2Dt}\right)^2\right] d^3\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-\frac{\mathbf{a}^2}{4Dt}} \int_{R^3} \exp[-Dt\xi^2] d^3\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-\frac{\mathbf{a}^2}{4Dt}} \left(\frac{\pi}{Dt}\right)^{3/2} = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{\mathbf{a}^2}{4Dt}} = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4Dt}}, \end{aligned}$$

kde jsme argument doplnili na čtverec v \mathbf{k} . V neomezeném prostředí máme tedy výsledek:

$$\blacktriangleright \quad G(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4Dt}} \quad (488)$$

Je zřejmé, že Diracův impuls lokalizovaný v \mathbf{x}' je gaussovsky s časem „rozmyván“. V jedno-rozměrném problému je situace ukázána na obrázku:



Obecnou počáteční podmínku rozložíme na jednotlivé diracovské impulsy a výsledná řešení sečteme (pravá strana v naší rovnici chybí):

$$\blacktriangleright \quad \phi(t, \mathbf{x}) = G * \phi_0 = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \int e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4Dt}} \phi_0(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (489)$$

Řešení je konvolucí počáteční podmínky a Greenovy funkce. Přímým dosazením do rovnice difúze lze snadno ukázat, že vztah (489) je jejím řešením.

● **Příklad:** Nalezněte střední polohu a střední kvadratickou fluktuaci polohy částic pro difúzi Diracova impulsu, tedy pro Greenovu funkci (488), pokud je zdroj v počátku ($\mathbf{x}' = 0$).

Řešení: Určeme nejprve $\langle x \rangle$ a $\langle x^2 \rangle$:

$$\langle x \rangle = \int G(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') x d^3 \mathbf{x} = \int \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} x dx dz dy = 0,$$

$$\langle x^2 \rangle = \int G(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') x^2 d^3 \mathbf{x} = \int \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} x^2 dx dz dy = 2Dt.$$

Integrály se rozdělí na jednotlivé integrace a ty určíme ze vztahů známých z integrálního počtu. Střední poloha je v počátku (tam, kde byl lokalizován Diracův impuls) a platí:

$$\langle \mathbf{x} \rangle = (0, 0, 0),$$

$$\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \rangle = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle = 6Dt,$$

$$l_{kv} \equiv \sqrt{\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{6Dt}.$$

Pro difúzi je charakteristické, že střední kvadratické fluktuace rostou s časem jako $t^{1/2}$. ▀



10. ZÁKONY ZACHOVÁNÍ

V tomto textu nebudeme řešit původ zákonů zachování, ten souvisí se symetriemi v přírodě a má hlubší smysl, který se řeší v teoretické mechanice a kvantové teorii. Nás bude zajímat lokální matematický popis zákonů zachování, tj. fakt, že pokud zachovávající veličina z nějakého místa zmizí, musela odtéct do místa sousedního. To vyjadřuje *rovnice kontinuity*, kterou si postupně napíšeme pro hmotnost, počet částic, náboj, energii a hybnost. Samozřejmě bychom mohli pokračovat i s dalšími veličinami, to je ale za hranicemi možností tohoto učebního textu.

Extenzivní veličiny a kontinuita

Uvažujme proudění extenzivní (často se říká aditivní) veličiny A . To je taková veličina, která roste s počtem částic, například hmotnost, náboj, energie, hybnost, teplo...). Opakem jsou intenzivní veličiny, které na počtu částic nezávisí (teplota, rychlostní pole, intenzita elektrického pole...). Proudění aditivní veličiny popisujeme čtveřicí veličin, první z nich nazýváme *hustotou aditivní veličiny* a definujeme ji vztahem

$$\rho_A \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta V}. \quad (490)$$

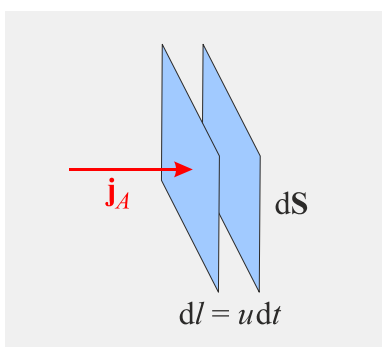
Příkladem může být hustota hmoty (kg/m^3), hustota náboje (C/m^3), hustota energie (J/m^3), hustota výkonu (W/m^3) nebo hustota hybnosti ($\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}/\text{m}^3$); obecně má hustota aditivní veličiny rozměr

$$[\rho_A] = \frac{[A]}{\text{m}^3}. \quad (491)$$

Druhá veličina je vektorová, říkáme jí tok veličiny A a definujeme ho vztahem

$$\mathbf{j}_A \equiv \rho_A \mathbf{u}. \quad (492)$$

Jako každá vektorová veličina má i tok velikost a směr. Směr je jasný na první pohled, jde o směr rychlostního pole, popisujícího proudění. Velikost toku snadno zjistíme, pokud budeme sledovat tečení naší entity kolmou plochou. Za čas dt se jednotlivé atomy a molekuly dostanou o $dl = u dt$ dále k jiné myšlené ploše:



Pro velikost toku platí:

$$j_A = \rho_A u = \frac{dA}{dV} \frac{dl}{dt} = \frac{dA}{dS} \frac{dl}{dt} = \frac{dA}{dS} \frac{dl}{dt}. \quad (493)$$

Tok veličiny má tedy význam množství veličiny proteklé kolmou jednotkovou plochou za jednotku času a jeho rozměr je

$$[j_A] = \frac{[A]}{\text{m}^2 \text{s}}. \quad (494)$$

Příkladem může být tok energie ($\text{J}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$), tok náboje ($\text{C}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$), tok hmoty ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$) atd. Jde o zcela jiný tok, než jsme zaváděli u intenzivních vektorových veličin vztahem (210). Jestliže se veličina A při proudění neztrácí ani nepřibývá, musí být její časový úbytek z libovolného objemu roven toku veličiny přes plochu obklopující tento objem:

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_A dV = \oiint_{\partial V} \mathbf{j}_A \cdot d\mathbf{S}. \quad (495)$$

Hranice objemu V je označena ∂V . Na levé straně přesuneme časovou derivaci do integrace, ρ_A je ale funkcí času i prostoru, proto se derivace změní na parciální. Na pravou stranu budeme aplikovat Gaussovu větu a plošný integrál převedeme na objemový:

$$-\iiint_V \frac{\partial \rho_A}{\partial t} dV = \iiint_V \text{div } \mathbf{j}_A dV. \quad (496)$$

Oba integrály nyní spojíme:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}_A \right) dV = 0. \quad (497)$$

Uvedený vztah musí při proudění platit v libovolném objemu, a to je možné jen tehdy, je-li argument integrálu roven nule (mohl by v principu být nenulový jen v některých bodech nebo plochách, obecně na množině menší dimenze, než přes kterou integrujeme):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}_A = 0. \quad (498)$$

Odvozený vztah se nazývá *rovnice kontinuity* a na pravé straně je nula, pokud se veličina A při proudění zachovává. Nezachovává-li se, není na pravé straně nula, rovnici kontinuity můžeme pak psát ve tvaru

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}_A = \mathcal{S} + \mathcal{F}, \quad (499)$$

kde \mathcal{S} popisuje srážkové procesy a \mathcal{F} vliv sílových polí působících na systém. Oddělení časových a prostorových proměnných je jen formální, rovnici kontinuity můžeme také zapsat ve tvaru čtyřrozměrné divergence

$$\frac{\partial j_0}{\partial x_0} + \frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3} = 0. \quad (500)$$

kde jsme označili

$$j_0 = \rho_A; \quad j_1 = j_x; \quad j_2 = j_y; \quad j_3 = j_z, \quad (501)$$

$$x_0 = t; \quad x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z. \quad (502)$$

Index A jsme pro jednoduchost vynechali. Obě poslední čtveřice se v relativitě transformují stejným způsobem (Lorentzovou transformací) a představují tzv. čtyřvektory. Rovnici kontinuity můžeme upravit ještě do jednoho užitečného tvaru se substancionální derivací:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k (\rho u_k) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_k} u_k + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \text{div } \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

Výsledný tvar proto je

$$\blacktriangleright \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (503)$$

Z posledního výrazu je zřejmé, že nestlačitelná tekutina (kapalina) splňuje

$$\blacktriangleright \quad \rho = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (504)$$

Divergence rychlostního pole kapalin je vždy nulová, u plynů toto ale neplatí. Oba zápisy rovnice kontinuity (498), (503) jsou ekvivalentní. Při numerických výpočtech jsou ale metody zacházení s oběma tvary zcela odlišné a některé metody jsou vhodné pro tzv. konzervativní tvar (498), jiné naopak pro tvar s úplnou časovou derivací (503).

Zákon zachování hmoty a náboje

Nejjednodušší je zákon zachování hmoty a jeho modifikace. Odpovídající rovnice kontinuity má tvar (pokud nepíšeme žádné indexy, jde automaticky o hustotu hmoty a tok hmoty)

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (505)$$

Její mírnou modifikací je rovnice kontinuity pro počet částic. Hustota počtu částic (počet částic v objemové jednotce se nazývá koncentrace

$$n \equiv \frac{dN}{dV}; \quad [n] = 1/\text{m}^3. \quad (506)$$

Příslušná rovnice kontinuity je

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{u}) = 0. \quad (507)$$

Pokud jsou částice nabitě, platí zákon zachování náboje a jeho vyjádřením je rovnice kontinuity pro hustotu a tok náboje:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_Q) = 0. \quad (508)$$

Ukažme, že tento zákon plyne přímo z Maxwellových rovnic:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q; \quad (509)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (510)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad (511)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (512)$$

Z první rovnice vyjádříme první člen v rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

Časovou změnu elektrické indukce vyjádříme z třetí Maxwellovy rovnice:

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{j}_Q) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \operatorname{div} \mathbf{j}_Q = -\operatorname{div} \mathbf{j}_Q.$$

Využili jsme vektorovou identitu $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$. Porovnáme-li začátek a konec výpočtu, máme

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j}_Q \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_Q = 0,$$

což je právě zákon zachování náboje (508). Vidíme, že je automatickou součástí Maxwellových rovnic. Nebylo tomu tak ale vždy. Právě proto, aby rovnice obsahovaly zákon zachování náboje, musel do nich Maxwell přidat tzv. posuvný proud $\partial \mathbf{D} / \partial t$.

Zákon zachování energie

Napišme zákon zachování energie pro vodivou tekutinu (například plazma). Příslušná rovnice kontinuity nebude mít na pravé straně nulu, ale bude zde člen vyjadřující změnu energie vodivé tekutiny způsobenou působením elektrických a magnetických polí:

$$\frac{\partial \rho_W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_W = \mathcal{P}. \quad (513)$$

První člen je časová změna hustoty energie, samotná hustota energie má jednotku J/m^3 a skládá se z hustoty kinetické energie a hustoty vnitřní energie vodivé tekutiny. Následuje divergence toku energie, ten se skládá z toku kinetické energie, toku vnitřní energie, toku tlakové energie a tepelného toku. Detailní skladba jednotlivých členů nás pro naše účely nebude zajímat. Z prvního členu je jasné že člen na pravé straně musí mít význam časové změny hustoty energie. Časová změna energie je výkon, půjde tedy o hustotu výkonu působících sil. Pro samotný výkon můžeme psát

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (514)$$

Za sílu nyní dosadíme Lorentzovu sílu:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = Q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}, \quad (515)$$

kde jsme jako první napsali charakteristiky částice. Magnetické pole nepřispěje, protože jen mění směr rychlosti, nikoli její velikost, tj. energii. My ale nepotřebujeme celkový výkon, ale hustotu výkonu, tedy výkon vztahovaný na objemovou jednotku. Rychlost jedné částice se změní na rychlostní pole \mathbf{u} kontinua a z náboje se stane nábojová hustota:

$$\mathcal{P} = \frac{dP}{dV} = \rho_Q \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}. \quad (516)$$

Jde o hustotu Jouleova výkonu, jednotkou je W/m^3 . Celkový zákon zachování energie vodivé tekutiny bude mít tedy tvar

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho_W^{(P)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_W^{(P)} = \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}. \quad (517)$$

Horní symbol (P) označuje, že jde o částice (Particles). V dalším totiž odvodíme obdobnou rovnici kontinuity pro elektromagnetické pole.

Zákon zachování energie pro pole

Hustota energie elektromagnetického pole je známá ze základních kurzů fyziky:

$$\rho_W^{(EM)} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2}. \quad (518)$$

První člen je hustota energie elektrického pole, jde například o hustotu energie na kondenzátoru. Obdobně je druhý člen hustotou energie magnetického pole, jde například o hustotu magnetické energie cívky. Z Maxwellových rovnic (509) až (512) vypočteme časovou změnu hustoty energie a upravíme do tvaru zákona zachování. Budeme uvažovat lineární vztahy mezi oběma elektrickými vektory a mezi oběma magnetickými vektory:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \\ &= \mathbf{E} \cdot (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}_Q) + \mathbf{H} \cdot (-\text{rot } \mathbf{E}) = \\ &= \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E} = \\ &= -\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Výsledný zákon zachování energie pro pole má proto tvar:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}. \quad (519)$$

V časové derivaci je hustota elektrické a hustota magnetické energie. V prostorové derivaci je tok energie $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, který nazýváme Poyntingův vektor. Člen na pravé straně je hustota Jouleova výkonu odváděná z pole na ohřev částic. Celkový zákon zachování energie získáme sečtením částicové části (517) a polní části (519):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_W^{(P)} + \rho_W^{(EM)} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{j}_W^{(P)} + \mathbf{j}_W^{(EM)} \right) = 0. \quad (2.520)$$

$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} \rho_W^{(EM)} &= \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2}; \\ \mathbf{j}_W^{(EM)} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (2.521)$$

V časové derivaci jsou *hustoty energií* (částic, elektrické, magnetické); v prostorové derivaci jsou *toky energií* (částic, elektromagnetické). Zákon zachování energie platí jen pro soustavu částic a pole. Oddělené zákony zachování mají nenulové pravé strany obsahující hustotu Jouleova výkonu.

Zákon zachování hybnosti

Hybnost je první vektorová veličina, jejíž zákon zachování zformulujeme. Hybnost částice a její hustota jsou dány vztahy

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}; \quad (522)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \rho \mathbf{u}. \quad (523)$$

Pro určení časové změny hustoty hybnosti budeme potřebovat časovou změnu hustoty hmoty (tu určíme z rovnice kontinuity) a časovou změnu rychlostního pole (tu určíme z pohybové rovnice vodivé tekutiny). Pro objekt o hmotnosti m platí Newtonova pohybová rovnice

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (524)$$

Pro proudící prostředí zavedeme hustotu síly

$$\mathbf{f} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} \quad (525)$$

V hustotách bude Newtonova pohybová rovnice mít tvar (rychlost \mathbf{v} jedné částice se stane rychlostí proudění \mathbf{u})

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}. \quad (526)$$

Po rozepsání substancionální derivace získáme rovnici

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (527)$$

Zbývá určit hustotu síly. Ta se liší podle procesů, které popisujeme. V našem případě vodivé tekutiny půjde o tlakovou sílu a Lorentzovu sílu:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_L. \quad (528)$$

Nejprve určíme hustotu tlakové síly. Pokud tlaková síla odtlačí nějakou plošku dS na vzdálenost dl , vykoná práci

$$dA = F dl = p dS dl = p dV. \quad (529)$$

Tlak tedy figuruje jako hustota energie. Příkladem může být tíže, kde je energie mgh a jí odpovídající hydrostatický tlak je ρgh . Síla je obecně minus gradientem potenciální energie, lze tedy očekávat, že hustota síly bude souviset s gradientem hustoty energie, tj. tlaku:

$$\mathbf{f}_p = -\nabla p. \quad (530)$$

Znaménko je minus, tlaková síla působí z oblastí vyšších tlaků do oblastí nižších tlaků. Nyní nám zbývá odvodit hustotu Lorentzovy síly

$$\mathbf{F}_L = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (531)$$

Pro hustotu síly bude platit

$$\mathbf{f}_L = \rho_Q \mathbf{E} + \rho_Q \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \rho_Q \mathbf{E} + \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}. \quad (532)$$

Tím můžeme zapsat výslednou pohybovou rovnici do tvaru

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho_Q \mathbf{E} + \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}. \quad (533)$$

Na vodivou tekutinu působí tlaková síla, elektrické pole a magnetické pole. Jde o hledanou rovnici pro časový vývoj rychlostního pole. Nyní budeme hledat zákon zachování hybnosti ve tvaru rovnice kontinuity. Nalezneme časový vývoj hustoty hybnosti (jedné z jejích složek)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) = \frac{\partial \rho}{\partial t} u_k + \rho \frac{\partial u_k}{\partial t}. \quad (534)$$

Za časovou změnu hustoty dosadíme z rovnice kontinuity (505) a za časovou změnu rychlosti z pohybové rovnice (533):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) = -\partial_l(\rho u_l) u_k - \rho(u_l \partial_l) u_k - \partial_k p + f_k^{(L)}. \quad (535)$$

Hustota Lorentzovy síly neobsahuje žádné derivace, proto ji nebudeme nijak upravovat (bude onou pravou stranou rovnice kontinuity) a proto jsme ani nerozepisovali její jednotlivé členy. Písmeno „L“ označující, že jde o Lorentzovu sílu, jsme přesunuli nahoru, aby nekolidovalo s indexem označujícím složku vektoru. Všechny členy s derivacemi převedeme na levou stranu a upravíme:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial(\rho u_l)}{\partial x_l} u_k + (\rho u_l) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial p}{\partial x_k} = f_k^{(L)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho u_l u_k) + \frac{\partial p}{\partial x_k} = f_k^{(L)} \quad \Rightarrow$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(p\delta_{kl} + \rho u_k u_l) = f_k^{(L)}. \quad (536)$$

Získali jsme zákon zachování hybnosti pro vodivou tekutinu. V závorce v prostorových derivacích je *tenzor toku hybnosti* neboli *tenzor tlaku*. Sama hybnost je vektorová veličina, a proto její tok tvoří tenzor druhého řádu (každá složka teče do tří směrů). Symetrie tenzoru tlaku zajišťuje zachování momentu hybnosti v proudící tekutině. Tenzor tlaku se skládá ze dvou částí – skalární části, kterou tvoří normální tlak působící ve všech směrech stejně. Druhou částí je tenzorová část související s prouděním tekutiny, tzv. dynamický tlak. Zákon zachování hybnosti můžeme napsat ve složkovém zápisu

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(T_{kl}^{(P)}) = f_k^{(L)}; \quad T_{kl}^{(P)} \equiv p\delta_{kl} + \rho u_k u_l. \quad (537)$$

nebo v invariantním tvaru

$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}^{(P)}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{T}}^{(P)} &= \mathbf{f}_L; \\ \boldsymbol{\gamma}^{(P)} &\equiv \rho \mathbf{u}, \\ \vec{\mathbf{T}}^{(P)} &\equiv p\vec{\mathbf{1}} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}; \\ \mathbf{f}_L &\equiv \rho_Q \mathbf{E} + \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (538)$$

Symbol (P) označuje, že jde o částice, zákon zachování hybnosti bude mít ještě polní část. Hybnost tekutiny se nezachovává, elektrická a magnetická pole jí hybnost předávají, což je reflektováno nenulovou pravou stranou.

Zákon zachování hybnosti pro pole

Elektromagnetické pole můžeme chápat jako soustavu fotonů s nulovou klidovou hmotností, jejichž hybnost je

$$\mathbf{p} = m \mathbf{c}. \quad (539)$$

V tomto vztahu označuje m pohybovou hmotnost, kterou lze přes energii vyjádřit za pomoci Einsteinovy formule $m = W/c^2$:

$$\mathbf{p} = \frac{W}{c^2} \mathbf{c} = \frac{W \mathbf{c}}{c^2}. \quad (540)$$

Energii záměrně označujeme písmenem W , symbol E by kolidoval s elektrickým polem. Pro hustotu hybnosti pole $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{EM}$ tedy máme

$$\boldsymbol{\gamma}^{(EM)} = \frac{\rho_W \mathbf{c}}{c^2} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2}, \quad (541)$$

kde jsme tok energie v čitateli napsali jako Poyntingův vektor. Vyjádříme-li rychlost světla za pomoci permitivity a permeability ($c^2 = 1/\epsilon\mu$), dostaneme vztah pro hustotu hybnosti pole:

$$\blacktriangleright \quad \boldsymbol{\gamma}^{(EM)} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}. \quad (542)$$

Je patrné, že tok energie je vektorovým součinem intenzit obou polí, zatímco hustota hybnosti pole je vektorovým součinem indukci obou polí. Naším cílem je nyní sestavit zákon zachování hybnosti elektromagnetického pole, tedy najít časovou derivaci vztahu (542). Při úpravách využijeme Maxwellovy rovnice (509) až (512):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}^{(\text{EM})}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}_Q) \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times (-\text{rot } \mathbf{E}) = \dots$$

Následují standardní úpravy, ve kterých členy s prostorovými derivacemi převedeme do tvaru divergence. Lze to provést například za pomoci přepisu vektorových součinů pomocí Leviho-Civitova tenzoru. Výsledkem elementárních úprav s využitím Maxwellových rovnic je

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{(\text{EM})} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{T}}^{(\text{EM})} = -\bar{\mathbf{f}}_L. \quad (543)$$

Záměrně jsme použili notaci vektorů a tenzorů s šipkami, aby bylo patrné, který symbol má jaký význam. Pro jednotlivé členy máme:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{(\text{EM})} &\equiv \mathbf{D} \times \mathbf{B}, \\ \bar{\mathbf{T}}^{(\text{EM})} &\equiv \bar{\mathbf{T}}^{(\text{E})} + \bar{\mathbf{T}}^{(\text{M})}, \\ \blacktriangleright \quad \bar{\mathbf{T}}^{(\text{E})} &\equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \bar{\mathbf{1}} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{D}; \quad T_{kl}^{(\text{E})} \equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \delta_{kl} - E_k D_l, \\ \bar{\mathbf{T}}^{(\text{M})} &\equiv \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \bar{\mathbf{1}} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{B}; \quad T_{kl}^{(\text{M})} \equiv \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \delta_{kl} - H_k B_l \\ \bar{\mathbf{f}} &\equiv \rho_Q \mathbf{E} + \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (544)$$

Veličina $\bar{\mathbf{T}}^{(\text{EM})}$ má hned tři názvy: *tenzor toku hybnosti pole* nebo *tenzor tlaku pole* nebo se nazývá *Maxwellův tenzor pnutí*. Skalární části tenzorů hrají roli elektrického a magnetického tlaku:

$$\blacktriangleright \quad P_E = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2}, \quad (545)$$

$$\blacktriangleright \quad P_M = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2}, \quad (546)$$

Oba tlaky jsou, jak už to bývá, současně odpovídajícími hustotami energie. Například magnetický tlak ve slunečních skvrnách způsobuje snížení hydrostatického tlaku a s tím teploty skvrny.

Vidíme, že hybnost elektromagnetického pole se nezachovává. Je to dáno předáváním hybnosti pole částicím. Teprve celkový součet hybnosti všech částic a pole má tvar zákona zachování. Získáme ho sečtením rovnic (538) a (543):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u} + \mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\mathbf{T}}^{(\text{P})} + \bar{\mathbf{T}}^{(\text{E})} + \bar{\mathbf{T}}^{(\text{M})}) = 0. \quad (547)$$

Odvozená rovnice je zákonem zachování hybnosti pro vodivou tekutinu a elektromagnetické pole. První člen v časové derivaci má význam *hustoty hybnosti látky* $\rho \mathbf{u}$, což je ale současně tok hmoty z rovnice kontinuity. Druhý člen $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$ je *hustotou hybnosti elektromagnetického pole*. V prostorových derivacích se nacházejí tenzory *toku hybnosti částic*, *toku hybnosti elektrického pole* a *toku hybnosti magnetického pole*.

Elektromagnetické pole není pouhou matematickou konstrukcí, je nositelem energie, hybnosti a momentu hybnosti. Tyto atributy může od částic přebírat, nebo jim je předávat. Proto mají příslušné zákony zachování nenulové pravé strany. Teprve pro soustavu polí a částic platí zákon zachování energie, hybnosti a momentu hybnosti.



11. PORUCHOVÝ POČET

V případě nelineárních rovnic je často velmi užitečné nalézt nějaké základní řešení (například klidný vzduch v místnosti) a hledat další řešení ve tvaru poruchy, která je lineární, tj. můžeme zanedbat její druhé a vyšší mocniny. Takový přístup vede na soustavu lineárních rovnic pro poruchy, což znamená, že je lze rozložit do Fourierových módů, řešit každý moc zvlášť a poté opět složit obecné řešení. Pokud je prostředí nějak omezené (není nekonečné), bude většinou základní řešení záviset na nějakých proměnných, například na vzdálenosti od rozhraní, což může další analýzu zkomplikovat. V případě nestability podchytíme poruchovým počtem jen začátek nestability. Nestabilita bude exponenciálně narůstat a poruchy přestanou být malé, tj. dostaneme se za hranice platnosti poruchového počtu.

Základní principy

Označme veličinu, jejíž hodnoty se mění v čase a prostoru $\psi(t, \mathbf{x})$. Může jít o tlak, hustotu prostředí, teplotu, ale i vektorové veličiny, například rychlostní, elektrické či magnetické pole a podobně. Uveďme si nejprve některé pojmy, které se používají v teorii vln.

Vlnová funkce

Velichina $\psi(t, \mathbf{x})$ resp. $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ popisuje vlnění v čase a v prostoru. Položíme-li $t = \text{const}$, pozorujeme časový snímek vlnění. Můžete si představit, že vyfotografujeme například vlnící se mořskou hladinu a prohlédneme si vzniklou fotografii. Položíme-li $\mathbf{x} = \text{const}$, pozorujeme časový průběh sledované veličiny v jednom určitém místě. Vlnění většinou popisujeme komplexní vlnovou funkcí, použití komplexních čísel významně zjednoduší některé výpočty. Fyzikální význam má ale zpravidla jen reálná část vlnové funkce. Tak jako každou komplexní funkci, můžeme vlnovou funkci zapsat pomocí dvou reálných funkcí, amplitudy A a fáze φ :

$$\blacktriangleright \quad \psi(t, \mathbf{x}) = A(t, \mathbf{x}) e^{i\varphi(t, \mathbf{x})}; \quad \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) e^{i\varphi(t, \mathbf{x})}. \quad (548)$$

Vlnoplocha

Plocha spojující místa s konstantní hodnotou fáze φ vlnové funkce se nazývá vlnoplocha. Na vlnoploše je vlnění ve stejné fázi (například vlnoplocha spojující místa, v nichž má tlak 75 % maximální hodnoty).

Úhlová frekvence

Úhlovou frekvencí chápeme změnu fáze vlnění s časem, budeme ji definovat vztahem

$$\blacktriangleright \quad \omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (549)$$

Minus v definici není podstatné, zajišťuje jen, aby se rovinná vlna pohybovala ve směru vlnového vektoru. Úhlová frekvence se může měnit jak s časem, tak od místa k místu. Je-li úhlová frekvence neproměnná, lze ji zapsat pomocí periody T jako $\omega = 2\pi/T$.

Vlnový vektor

Vlnovým vektorem chápeme změnu fáze vlnění se všemi prostorovými proměnnými,

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \varphi. \quad (550)$$

Vlnový vektor jakožto gradient míří kolmo na vlnoplochu, tj. ve směru šíření vln. Jeho velikost i směr se může měnit s časem i od místa k místu. Je-li vlnový vektor neproměnný, lze jeho velikost zapsat pomocí vlnové délky λ jako $k = 2\pi/\lambda$.

Disperzní relace

Vlnění je v každém místě popsáno čtyřmi čísly (ω, \mathbf{k}) , která tvoří relativistický čtyřvektor. Tato čísla jsou závislá. Vztah mezi nimi lze odvodit z rovnic popisujících daný typ vlnění. Většinou má závislost obecný tvar

$$\phi(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (551)$$

a nazývá se *disperzní relace*. V některých případech je možné z disperzní relace explicitně vypočítat úhlovou frekvenci v závislosti na vlnovém vektoru

$$\omega = \omega(\mathbf{k}). \quad (552)$$

Tam, kde to explicitně možné není, můžeme použít větu o implicitní funkci a disperzní relaci ve tvaru $\omega(\mathbf{k})$ určit alespoň lokálně.

Rovinná (monochromatická) vlna

Jde o nejjednodušší typ vlny s konstantní amplitudou a fází, která je lineární funkcí času a prostoru:

$$\begin{aligned} A(t, \mathbf{x}) &= A; \\ \varphi(t, \mathbf{x}) &= c_0 t + c_1 x + c_2 y + c_3 z = -\omega t + k_x x + k_y y + k_z z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t. \end{aligned} \quad (553)$$

Význam koeficientů c_k je zřejmý z definice úhlové frekvence a vlnového vektoru. Termín monochromatická v názvu vlny znamená, že ve vlně je zastoupena jediná frekvence neboli barva (*chromos*). Rovinná (monochromatická) vlna má tedy tvar

$$\psi(t, \mathbf{x}) = A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]}. \quad (4.554)$$

Na první pohled je zřejmé, že plochy konstantní fáze $\varphi(t, \mathbf{x}) = \text{const}$ představují rovnice přesouvajících se rovin:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{x}) = \text{const} &\quad \Rightarrow \\ k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = \text{const} &\quad \Rightarrow \\ ax + by + cz + d(t) = 0. & \end{aligned}$$

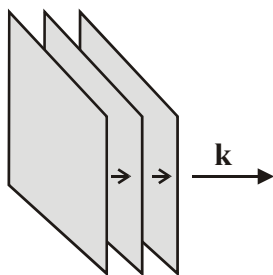
Přesun roviny budeme chápat jako kolmý k této rovině (šikmé přesuny rovin lze tak jako tak nahradit kolmým přesunem s rychlostí rovnou projekci rychlosti do kolmého směru). Směr přesunu určíme jako gradient rovnice roviny:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t \quad \Rightarrow \quad \nabla \varphi = \mathbf{k}.$$

Vlnový vektor proto míří ve směru šíření vlnění.

Fázová rychlost

Fázová rychlost je rychlost přesunu roviny konstantní fáze. Zvolme souřadnicový systém tak, aby se roviny přesouvaly ve směru první osy, tj. $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$



Diferencováním rovnice plochy konstantní fáze získáme rychlost přesunu plochy (fázovou rychlost)

$$kx - \omega t = \text{const} \quad \Rightarrow \quad k dx - \omega dt = 0 \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Pro obecnou volbu souřadnicového systému platí

$$\blacktriangleright \quad v_f = \frac{\omega}{k}; \quad \mathbf{v}_f = \frac{\omega}{k} \frac{\mathbf{k}}{k}. \quad (555)$$

První výraz určuje jen velikost fázové rychlosti, druhý výraz ukazuje, že vektor fázové rychlosti míří ve směru vlnového vektoru. Fázová rychlost souvisí jen s přesunem místa, které má stejnou fázi vlnění, nesouvisí se skutečným makroskopickým přesunem hmoty (kola šířící se na vodní hladině mají jinou rychlost než voda samotná). Fázová rychlost může být, a v mnoha případech je, nadsvětelná. Tvar disperzní relace určuje hodnotu fázové rychlosti pro různé frekvence. Jev, kdy se vlny různých frekvencí šíří různou rychlostí se nazývá *disperze*.

Obecná vlna

S rovinnými vlnami se velmi snadno pracuje a můžeme z nich poskládat vlnu obecnějšího tvaru:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int a(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d^3 \mathbf{k}. \quad (556)$$

Jde vlastně o Fourierovu transformaci $\psi(t, \mathbf{x}) \leftrightarrow a(\omega, \mathbf{k})$. Amplitudy vln jsou Fourierovým obrazem vlnové funkce. Integrace se provádí jen přes složky vlnového vektoru. Úhlová frekvence je na vlnovém vektoru závislá prostřednictvím disperzní relace (551), a proto se přes ni neintegruje. Formálně můžeme integraci zapsat čtyřrozměrně pomocí Diracovy distribuce:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int a(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \delta[\omega - \omega(\mathbf{k})] d\omega d^3 \mathbf{k}. \quad (557)$$

Fourierova transformace

Zkusme rovinnou vlnu derivovat podle časové a prostorové proměnné:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi &= \frac{\partial}{\partial t} A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = -i\omega A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = -i\omega \psi, \\ \frac{\partial}{\partial x_l} \psi &= \frac{\partial}{\partial x_l} A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = +ik_l A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = +ik_l \psi. \end{aligned}$$

Vidíme, že parciální derivace pro rovinnou vlnu přecházejí na algebraické výrazy. Jakékoli kombinace parciálních derivací lze nahradit algebraickými výrazy plynoucími z obou uvedených relací. Sestavme je do přehledné tabulky:

výraz	příklad
$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$	$\frac{\partial f}{\partial t} = -i\omega f$
$\frac{\partial}{\partial x_l} \rightarrow +ik_l$	$\frac{\partial f}{\partial x_l} = +ik_l f$
$\nabla \rightarrow +i\mathbf{k}$	$\nabla f = +i\mathbf{k} f$
$\text{div} \rightarrow i\mathbf{k} \cdot$	$\text{div } \mathbf{V} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}$
$\text{rot} \rightarrow i\mathbf{k} \times$	$\text{rot } \mathbf{V} = i\mathbf{k} \times \mathbf{V}$
$\nabla^2 \rightarrow -k^2$	$\nabla^2 f = -k^2 f$

Podle těchto pravidel převedeme výchozí soustavu na algebraickou soustavu rovnic, se kterou se snáze zachází. Tento krok je ekvivalentní provedení Fourierovy transformace.

Grupová rychlost

Zkoumejme nyní rychlost přesunu vlnového balíku – klubka vln podobných frekvencí a vlnových vektorů. Pro jednoduchost budeme uvažovat balík šířící se ve směru osy x (tak zvolíme souřadnicový systém):

$$\psi(t, x) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(\omega, k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (558)$$

Amplituda vln je nenulová v intervalu $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$ a nahradíme ji konstantní amplitudou:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i(kx - \omega t)} dk.$$

V dalším kroku vytkneme z integrálu prostřední vlnu

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i[(k - k_0)x - (\omega - \omega_0)t]} dk.$$

Nesmíme zapomenout, že $\omega = \omega(k)$ a integrace se „skrytě“ provádí i přes ω . Další úpravy jsou zřejmé:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp \left[i(k - k_0) \left(x - \frac{\omega(k) - \omega_0}{k - k_0} t \right) \right] dk.$$

Zlomek v argumentu exponenciály lze nahradit derivací (pro $\Delta k \rightarrow 0$)

$$\frac{\omega(k) - \omega_0}{k - k_0} \approx \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} = v_g(k_0).$$

Veličina v_g má zatím význam jen označení pro výše definovanou parciální derivaci. Vlnový balík má nyní tvar:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp \left[i(k - k_0) (x - v_g t) \right] dk.$$

Je zřejmé, že po integraci přes vlnový vektor bude výsledek integrálu nějakou funkcí argumentu $x - v_g t$:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} F(x - v_g t) = A(x - v_g t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

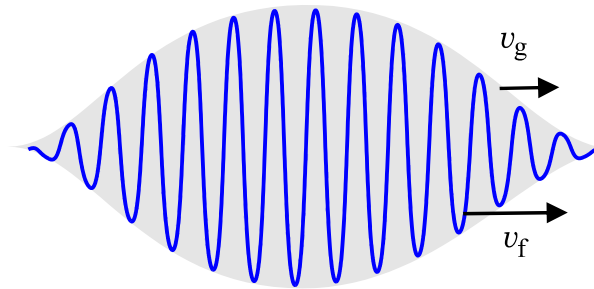
Balík má tedy obálku šířící se rychlostí v_g . Pro obecně mířící vlnový vektor je

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right). \quad (559)$$

Rychlost šíření vlnového balíku jako celku se nazývá *grupová rychlost*. Je to rychlost šíření informace o tvaru balíku a rychlost přenosu energie balíku. Nutně musí být podsvětelná.

S využitím de Broglieho vztahů a Hamiltonových kanonických rovnic $dq_k/dt = \partial H/\partial p_k$ snadno ukážeme, že jde o mechanickou rychlost částice kvantově spojené s vlnovým balíkem:

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \hbar \omega}{\partial \hbar \mathbf{k}} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v}_{\text{mech}}. \quad (560)$$



Zvukové vlny v plynech

Ukažme si nyní na jednoduchém příkladu zvukových vln ve zředěných plynech postup nalezení disperzní relace na základě poruchové teorie. Je-li výchozí model nelineární, může jít o značný problém. Rovnice jsou řešitelné jen někdy a žádné obecné postupy neexistují. Rovnice je možné linearizovat, ale tím ztrácíme mnoho z vlastností skutečných řešení. Lineární aproximace je ospravedlnitelná jen pro vlny malých amplitud, které chápeme jako malé poruchy nějakého známého (nejlépe stacionárního) řešení výchozí soustavy rovnic. Někdy je linearizace jedinou možností, jak se o řešení vůbec něco dozvědět. Z chování malých poruch můžeme obdobnými postupy jako v teoretické mechanice řešit problém stability řešení. Linearizace probíhá ve dvou krocích. Nejprve nalezneme „klidové“ řešení výchozí soustavy rovnic bez přítomnosti vln. V homogenním neomezeném prostředí jde zpravidla o konstantní řešení, u omezeného prostředí (například válcové vlákno) je situace složitější. V dalším kroku chápeme vlnu jako malou poruchu nalezeného řešení. „Malá porucha“ znamená, že relativní poruchy (vydělené nějakou charakteristickou hodnotou) se chovají jako malý bezrozměrný parametr, jehož mocniny vyšší než první zanedbáváme. V praxi řešení s přidáním poruchou dosadíme do výchozí soustavy rovnic a zanedbáme druhé a vyšší mocniny všech poruch. Výsledkem je lineární soustava rovnic pro poruchy bez pravé strany. Ta bude mít netriviální řešení pouze tehdy, pokud bude determinant soustavy nulový. Právě tato podmínka je hledanou disperzní relací. Aby byl determinant co možná nejnižšího řádu, vyplatí se na různých úrovních řešení eliminovat proměnné (snižovat jejich počet). Tím samozřejmě ztrácíme informaci o směrech kmitů jednotlivých vektorů, a pokud je chceme určit, musíme se vrátit k původní soustavě. Dostí ale řeči a pojďme si nastíněný postup vyzkoušet na zvukových vlnách ve zředěných plynech. Za výchozí model budeme považovat soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p, \\ p &= p(\rho) = K \rho^\gamma. \end{aligned} \quad (561)$$

První rovnice je rovnicí kontinuity pro hustotní pole ρ , druhá rovnice je pohybovou rovnicí pro rychlostní pole \mathbf{u} a soustava je uzavřena nějakou stavovou rovnicí, například polytropní (mocninnou) závislostí tlaku na hustotě. V soustavě je celkem pět neznámých (ρ , \mathbf{u} , p) a soustava je nelineární, vystupují zde součiny hledaných funkcí. Nejprve nalezneme alespoň jedno řešení. V našem případě půjde o nepohyblivý plyn v místnosti:

$$\rho = \rho_0, \quad \mathbf{u}_0 = 0, \quad p = p_0. \quad (562)$$

Nyní budeme předpokládat přítomnost malé poruchy

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}, \quad p = p_0 + \delta p. \quad (563)$$

Tuto poruchu dosadíme do soustavy (561):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \delta\rho) + \operatorname{div}[(\rho_0 + \delta\rho)(\delta\mathbf{u})] &= 0, \\ (\rho_0 + \delta\rho)\frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial t} + \rho(\delta\mathbf{u} \cdot \nabla)(\delta\mathbf{u}) &= -\nabla(p_0 + \delta p), \\ \delta p &= \alpha(\rho_0)\delta\rho; \quad \alpha \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (564)$$

V soustavě ponecháme jen poruchy prvního řádu, poruchy vyšších řádů zanedbáme. Derivace konstant jsou nulové. Ze soustavy po linearizaci proto zbude:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho) + \operatorname{div}[\rho_0(\delta\mathbf{u})] &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial t} &= -\nabla(\delta p), \\ \delta p &= \alpha(\rho_0)\delta\rho. \end{aligned} \quad (565)$$

Soustava (565) je již lineární soustavou pro neznámé $\delta\rho$, $\delta\mathbf{u}$, δp . Soustavu převedeme na algebraickou pomocí Fourierovy transformace. Naše soustava je již lineární, a tak je tento krok ekvivalentní dosazení rovinné vlny do soustavy. Výsledkem je

$$\begin{aligned} -i\omega\delta\rho + i\rho_0(\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{u}) &= 0, \\ -i\omega\rho_0\delta\mathbf{u} &= -i\mathbf{k}\delta p, \\ \delta p &= \alpha\delta\rho. \end{aligned} \quad (566)$$

Získaná soustava je pro pět neznámých a determinant by se počítal z matice 5×5 . Pomocí poslední rovnice eliminujeme tlak:

$$\begin{aligned} -\omega\delta\rho + \rho_0(\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{u}) &= 0, \\ \mathbf{k}\alpha\delta\rho - \omega\rho_0\delta\mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (567)$$

Nyní máme jen čtyři rovnice (jednu skalární a jednu vektorovou) pro čtyři neznámé $\delta\rho$, $\delta\mathbf{u}$ a determinant by se počítal z matice 4×4 . Povšimněte si, že z poslední rovnice plyne, že zvukové vlny jsou podélné (porucha rychlostního pole míří ve směru vlnového vektoru, tedy ve směru šíření vlny). Je možná ještě další eliminace proměnných. Z druhé (vektorové) rovnice spočteme poruchu rychlosti a dosadíme ji do první rovnice:

$$(-\omega^2 + \alpha k^2)\delta\rho = 0.$$

Výsledkem je jedna jediná rovnice pro jednu jedinou neznámou $\delta\rho$. Ne vždy lze provést eliminaci proměnných až do konce. Podmínkou nenulovosti řešení je nulovost kulaté závorky před $\delta\rho$ (jde o determinant matice 1×1):

$$-\omega^2 + \alpha(\rho_0)k^2 = 0. \quad (568)$$

Nalezenou disperzní relaci lze snadno řešit vzhledem k ω , za α dosadíme z (564)

$$\omega = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} k. \quad (569)$$

Disperzní relace vyšla reálná, reálnému vlnovému vektoru odpovídá reálná úhlová frekvence a řešením jsou vlny. V systému nedochází ani k útlumu ani k nestabilitě. Výsledná disperzní relace je lineární, fázová a grupová rychlost mají stejnou hodnotu, zvuk se šíří rychlostí

$$c_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}. \quad (570)$$

Speciálně pro polytropní děje $p = K\rho^\gamma$ vychází (m_0 je hmotnost jednoho atomu)

$$\blacktriangleright \quad c_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{m_0}}. \quad (571)$$

Za pomoci rychlosti zvuku lze disperzní relaci zvukových vln zapsat ve tvaru

$$\blacktriangleright \quad \omega = c_s k. \quad (572)$$

Zvukové vlny v pohyblivém prostředí

Připusťme nyní nenulovou rychlost ve stacionárním řešení (to odpovídá šíření zvuku v pohybujícím se prostředí) a požadujeme řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \delta\rho, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}, \\ p &= p_0 + \delta p. \end{aligned} \quad (573)$$

Co všechno se změní? Výpočet probíhá zcela analogicky, nyní ale při linearizaci přispěje i konvektivní člen v pohybové rovnici. Po snadném výpočtu získáme disperzní relaci

$$\begin{aligned} [\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0]^2 - \alpha(\rho_0)k^2 &= 0; \\ \alpha &= \frac{\partial p}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (574)$$

a z ní pozorovanou úhlovou frekvenci

$$\omega = c_s k + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 = c_s k + k u_0 \cos \varphi = c_s k \left(1 + \frac{u_0}{c_s} \cos \varphi \right). \quad (575)$$

Ve výrazu jsme φ označili úhel mezi vlnovým vektorem \mathbf{k} a rychlostí prostředí \mathbf{u}_0 . Označme-li ještě frekvenci zvuku v nepohyblivém prostředí $\omega_0 = c_s k$, máme výsledný vztah

$$\blacktriangleright \quad \omega = \omega_0 \left(1 + \frac{u_0}{c_s} \cos \varphi \right), \quad (576)$$

který není nic jiného než Dopplerův vzorec pro změnu frekvence vlivem pohybu zdroje vlnění. U pohybujících se tekutin se tedy v disperzní relaci objeví místo úhlové frekvence ω kombinace $\Omega = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0$.

Jeansovo kritérium

Popišme nyní vlny v oblaku plynu a prachu, který je ovládán gravitačním polem (mlhovinu). Zejména se budeme zajímat o to, za jakých podmínek je zvuková vlna nestabilní a může dojít k zhroucení části mlhoviny a vzniku globule – zhuštění, která je předchůdcem budoucí hvězdy.

V následující tabulce jsou porovnány veličiny popisující elektrostatické a gravitační pole. Správný koeficient u Laplaceovy-Poissonovy rovnice pro gravitační potenciál získáte porovnáním vztahů pro potenciální energii bodového zdroje elektrostatického a gravitačního pole.

veličina	elektrostatické pole	gravitační pole
potenciál bodového zdroje	$\phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$\phi_G = -G \frac{M}{r}$
potenciální energie	$V_E = q \phi_E$	$V_G = m \phi_G$
rovnice pro potenciál	$\nabla^2 \phi_E = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0}$	$\nabla^2 \phi_G = 4\pi G \rho_M$
síla vyjádřená z energie	$\mathbf{F} = -\nabla V_E$	$\mathbf{F} = -\nabla V_G$
síla vyjádřená z potenciálu	$\mathbf{F} = -q \nabla \phi_E$	$\mathbf{F} = -m \nabla \phi_G$
hustota síly	$\mathbf{f} = -\rho_Q \nabla \phi_E$	$\mathbf{f} = -\rho_M \nabla \phi_G$

Za výchozí sadu rovnic budeme považovat soustavu (561) doplněnou o hustotu gravitační síly a rovnici pro gravitační potenciál:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p - \rho \nabla \phi, \\ \nabla^2 \phi &= 4\pi G \rho, \\ p &= p(\rho). \end{aligned} \quad (577)$$

Vzhledem k tomu, že jde o gravitační problém bez přítomnosti elektrických polí, a nemůže proto dojít k záměně hustot ani potenciálů, vynecháváme index G . Celkem máme 6 rovnic pro 6 neznámých ρ , \mathbf{u} , ϕ , p . Řešení budeme hledat v perturbovaném tvaru

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}, \quad \phi = \phi_0 + \delta\phi, \quad p = p_0 + \delta p. \quad (578)$$

Veličiny nultého řádu musí splňovat rovnici $\Delta\phi_0 = 4\pi G\rho_0$, ze které plyne, že by mělo platit $\nabla\phi_0 \neq 0$. To je ale v rozporu s klidovým řešením pohybové rovnice pro $p_0 = \text{const}$. Tato nekonzistence vzniká nahrazením konečné mlhoviny nekonečným prostorem vyplněným látkou s konstantní hustotou, tlakem a teplotou. V přiblížení rozsáhlé mlhoviny můžeme zanedbat okrajové jevy a v perturbační analýze nadále požadovat $\nabla\phi_0 = 0$. Tato „nekonzistence“ byla obsažena již i v původním Jeansově řešení. Obdobným postupem nalezneme disperzní relaci zvukových vln ovlivněných gravitačním polem

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0; \quad c_s^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (579)$$

Oproti relaci (572) je zde navíc druhý člen na pravé straně. Řešení vzhledem k frekvenci ω je jednoduché:

$$\omega = \pm \sqrt{c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0}. \quad (580)$$

Na první pohled vidíme, že úhlová frekvence nemusí být reálnou veličinou. Pro

$$c_s^2 k^2 < 4\pi G\rho_0 \quad (581)$$

je úhlová frekvence ryze imaginární, $\omega = \pm ib$ a v rovinné vlně se objeví členy

$$e^{i\omega t} = e^{\mp bt}.$$

Některé typy poruch proto mohou exponenciálně narůstat a mlhovina se stává nestabilní. Právě v takovém prostředí mohou vznikat hvězdy jako původně malé poruchy narostlé do makroskopických rozměrů. Prozkoumejme proto podmínku (581) podrobněji:

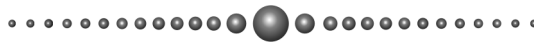
$$c_s^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} < 4\pi G\rho_0 \Rightarrow$$

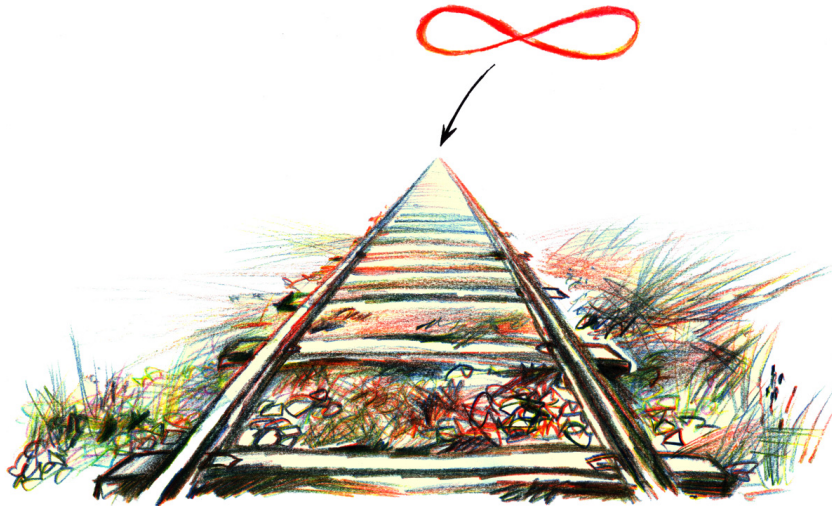
$$\lambda > \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} c_s = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{m_0}}.$$

Při odvození jsme použili pro rychlost zvuku vztah (571), m_0 je hmotnost jednoho atomu či molekuly mlhoviny. Poruchy s vlnovou délkou větší než určitá mez jsou gravitačně nestabilní. Aby se v mlhovině mohly tvořit hvězdy, musí mít rozměry větší než tato kritická mez. Uvedené tvrzení se nazývá Jeansovo kritérium a bylo odvozeno v roce 1902:

►
$$L > \sqrt{\frac{\pi \gamma k_B T}{G\rho_0 m_0}}. \quad (582)$$

Z disperzní relace (580) není samozřejmě problém dopočítat fázovou a grupovou rychlost šíření poruch mlhovinou. V ionizovaném prostředí za přítomnosti magnetických polí mohou hvězdy vznikat, aniž by splňovaly Jeansovo kritérium.





Petr Kulhánek
TF4: O vztahu matematiky a fyziky



Každá část této publikace může být šířena jakýmkoli způsobem.
Cílem není restrikce, ale vzdělávání co nejširšího okruhu čtenářů.

Autor: Prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc.
Odborná recenze: průběžná, studenti kurzu
Formát: elektronické skriptum, pdf, A4, 99 stran
Nakladatelství: AGA (Aldebaran Group for Astrophysics)
Sazba: AGA (Aldebaran Group for Astrophysics)
Vydání: první, 2018, průběžně aktualizované
Ikona videa: freepik.com CC BY 3.0

